
Sensitivitätsanalyse mittels adjungierter Verfahren für äquivalente Ersatzschaltbilder extrahiert aus 3D Feldmodellen

Zur Erlangung des akademischen Grades Doktor-Ingenieur (Dr.-Ing.)
genehmigte Dissertation von Sebastian Schuhmacher, MSc. aus Ulm/Donau
Tag der Einreichung: 15.12.2017, Tag der Prüfung: 12.03.2018
Darmstadt — D 17

Erstgutachter: Prof. Dr.-Ing. Herbert De Gersem
Zweitgutachter: Prof. Dr. rer. nat. Sebastian Schöps



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Institut für Theorie
Elektromagnetischer Felder

Fachbereich Elektrotechnik und
Informationstechnik

Sensitivitätsanalyse mittels adjungierter Verfahren für äquivalente Ersatzschaltbilder extrahiert aus 3D Feldmodellen

Genehmigte Dissertation von Sebastian Schuhmacher, MSc. aus Ulm/Donau

Erstgutachter: Prof. Dr.-Ing. Herbert De Gerssem

Zweitgutachter: Prof. Dr. rer. nat. Sebastian Schöps

Tag der Einreichung: 15.12.2017

Tag der Prüfung: 12.03.2018

Technische Universität Darmstadt

Darmstadt — D 17

Jahr der Veröffentlichung der Dissertation auf TUPrints: 2018

URN: urn:nbn:de:tuda-tuprints-73862

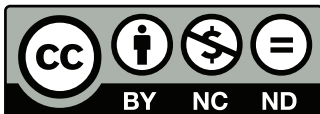
URL: <http://tuprints.ulb.tu-darmstadt.de/id/eprint/7386>

Dieses Dokument wird bereitgestellt von tuprints,

E-Publishing-Service der TU Darmstadt

<http://tuprints.ulb.tu-darmstadt.de>


tuprints@ulb.tu-darmstadt.de



Die Veröffentlichung steht unter folgender Creative Commons Lizenz:

Namensnennung – Nicht kommerziell – Keine Bearbeitung 4.0 International

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>



Sensitivitätsanalyse mittels adjungierter Verfahren für äquivalente Ersatzschaltbilder extrahiert aus 3D Feldmodellen

vom Fachbereich Elektrotechnik und Informationstechnik
der Technischen Universität Darmstadt

zur Erlangung des akademischen Grades
Doktor-Ingenieur (Dr.-Ing.)

Dissertation

von

Sebastian Alfred Schuhmacher, MSc

Erstgutachter: Prof. Dr.-Ing. Herbert De Gersem
Zweitgutachter: Prof. Dr. rer. nat. Sebastian Schöps

Darmstadt 2018

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	7
1.1	Motivation	7
1.2	Stand der Forschung	9
1.3	Wissenschaftliche Fragestellungen	10
1.4	Inhalt und Kapitelübersicht der Dissertation	10
2	Extraktion von Äquivalenten Ersatzschaltbildern	13
2.1	Feldgleichungen	15
2.2	Statische Kapazitäten	18
2.3	DC Leitwerte	23
2.4	Inzidenzmatrix	26
2.5	Partielle Induktivitäten	29
2.6	Äquivalente Parallele Kapazitäten (EPC)	35
3	Sensitivitäten extrahierter Netzwerkelemente	37
3.1	Geometrische Sensitivitätsanalyse	39
3.1.1	Finite Differenzen	39
3.1.2	Direkte Berechnung und Adjungiertes Verfahren	40
3.1.3	Sensitivität statischer Kapazitäten	42
3.1.4	Sensitivität von DC Leitwerten	45
3.1.5	Sensitivität von partiellen Induktivitäten	47
3.1.6	Sensitivität der Koppelfaktoren	50
3.1.7	Sensitivität der äquivalenten parallelen Kapazitäten	50
3.2	Sensitivität der Ersatzschaltbildelemente	52
3.3	Sensitivität von QoIs	53
4	Validation und Test	55
4.1	Elektrostatische Kapazitäten	55
4.2	Ohm'sche Widerstände	62
4.3	Induktivitäten	68
4.4	Äquivalente parallele Kapazitäten	80
5	Anwendungsbeispiel: EMI Filter	85
5.1	Extrahiertes äquivalentes Ersatzschaltbild	89
5.2	Inductance Cancellation	96

5.3	Analyse und Diskussion mit Hilfe der Sensitivitätsanalyse	101
5.4	Diskussion der Simulationsergebnisse	109
5.5	Adjungiertes Verfahren	118
6	Schlussfassung und Ausblick	121
6.1	Zusammenfassung	121
6.2	Beschlüsse	122
6.3	Ausblick	122
	Literatur	131
A	Curriculum Vitae	136
B	Schriftverzeichnis	137
B.1	Beiträge in Zeitschriften	137
B.2	Beiträge auf internationalen Konferenzen	137

Das spezifizierte Verhalten eines elektrischen Gerätes wird durch das Modell eines rein funktionellen Ersatzschaltbildes beschrieben. Die durch elektromagnetische Felder vermittelten Verkopplungen zwischen Bauteilen und Geometriebereichen sind in der Lage, ein dazu abweichendes Verhalten zu verursachen. Um diese Ursachen verhindern zu können müssen jedoch diese parasitären Effekte identifiziert und ihre Koppelpfade verstanden werden. In der ursprünglichen Modellbeschreibung sind diese parasitären Effekte, in Form von parasitären Ersatzschaltbildelementen, nicht enthalten und müssen in dem funktionellen Modell ergänzt werden. Durch das Auswerten von Feldmodellen in verschiedenen Näherungen der Maxwellgleichungen lassen sich Ersatzschaltbildelemente und deren Größen bestimmen, die diese Effekte auf Netzwerkebene abbilden können. Ein Gleichsetzen der Größen ermöglicht eine Extraktion von parasitären Kapazitäten, Induktivitäten und Widerständen aus der 3D Geometrie.

Das extrahierte Ersatzschaltbild ist eine Funktion der Geometrie und der Materialparameter. Dadurch ist es möglich parasitäre Verkopplungen zu reduzieren und das Verhalten von Zielgrößen, den sog. „Quantities of Interest“ (QoIs), zu verbessern. Die dafür benötigte Identifikation von sensitiven Geometriebereichen und die zur Optimierung notwendigen Sensitivitäten (Gradienten), werden durch Sensitivitätsanalysen auf Geometrie- und auf Netzwerkebene erreicht. Die Berechnungen auf Geometrieebene werden mit dem adjungierten Verfahren durchgeführt, wodurch sich die Möglichkeit bietet, die Sensitivitäten bzgl. einer großen Anzahl von Geometrieparametern effizient zu berechnen. Dies ebnet den Weg für eine Freiformoptimierung.

Um eine derartige Sensitivitätsanalyse für das Extraktionsverfahren zu erhalten wird in dieser Arbeit eine Sensitivitätsanalyse auf Netzwerkebene, eine geometrische Sensitivitätsanalyse und die Sensitivitätsanalyse der QoIs etabliert. Die dabei entwickelten Methoden werden an analytisch überprüfbaren Beispielen getestet. Das Verfahren wird dann genutzt um eine Realisierung eines electromagnetic interference (EMI)-Filters durch den Effekt der Inductance Cancellation bzgl. seiner Gegentaktdämpfung zu optimieren und zu untersuchen.

Abstract

The specified behavior of an electronic device is described by a purely functional electrical network. The electromagnetic field couplings between components and parts of the 3D model geometry can cause a divergent behavior. In order to prevent the cause, however, these parasitic effects have to be identified and its coupling paths have to be understood. In the original model description these parasitic effects are not included and must be added to the functional model. By evaluating field models in different approximations to Maxwell's equations the network elements and its quantities can be determined, which can describe these effects on the network level. Equating the quantities allows an extraction of parasitic capacitances, inductances and resistances from the 3D Geometry.

The extracted electrical network is a function of the geometry and the material parameters. As a consequence it is possible to reduce parasitic couplings and to improve the behavior of the so called „Quantities of Interests“ (QoIs). The required identification of sensitive geometry areas and the necessary sensitivities (gradients) is achieved by sensitivity analysis on geometry- and network level. The calculations on the geometry level are accomplished by using the adjoint technique, which offers the possibility to calculate the sensitivities of a large number of geometry parameters. This paves the way for a non-parametric optimization.

To obtain such a sensitivity analysis for the extraction method a sensitivity analysis on network level, a geometric sensitivity analysis and a sensitivity analysis of the QoIs is developed. The developed methods are tested on analytic, verifiable examples. The methodology is finally applied to investigate and optimize a realization of an electromagnetic interference (EMI) filter with respect to its differential mode attenuation, utilizing the inductance cancellation effect.

1 Einleitung

Die heute zur Verfügung stehende Rechenkapazität, effiziente Verfahren [1] und die zunehmende intuitive Bedienbarkeit von Tools machen simulative Methoden zu einem attraktiven Werkzeug in der Forschung und Entwicklung, wodurch diese in immer mehr physikalischen Domänen zum Einsatz kommen. Simulationen versetzen Entwickler und Forscher in die Lage, Experimente durchzuführen, die sonst aufwendig, sehr kostenintensiv oder sogar nicht realisierbar sind.

Eine wichtige Anwendung von Simulationsverfahren ist der Entwurf von elektronischen Geräten, deren Funktion durch Bauteile und deren Materialien bestimmt ist. Eine ungeeignete Spezifikation der Geometrie kann dazu führen, dass elektromagnetische Interaktionen innerhalb des Gerätes zu einem Fehlverhalten führen. Die geschickte Wahl bzw. Modifikation von Geometrien kann dabei durch simulative Methoden unterstützt werden. Dabei wird das Fehlverhalten frühzeitig identifiziert und schon vor der Umsetzung in einen ersten Prototypen vermieden.

1.1 Motivation

Die Entwicklung von elektrischen Geräten durchläuft einen Entwurfsprozess, in welchem sukzessive von einem rein funktionellen Ersatzschaltbild bis zur 3D Realisierung vorangegangen wird. Ein wichtiger Aspekt für eine korrekte Funktionsweise des Geräts ist die Beachtung der elektromagnetischen Verträglichkeit (EMV). Wie in [2] beschrieben, fasst die VDE0870 die elektromagnetische Verträglichkeit als die „Fähigkeit einer elektrischen Einrichtung, in ihrer Umgebung zufriedenstellend zu funktionieren...“ auf. Wird diese Verträglichkeit im Entwicklungsprozess nicht mit einbezogen, können in einer späten Entwicklungsphase auftretende EMV-Probleme zu einem erheblichen zusätzlichen Aufwand an Kosten und Zeit führen.

EMV-Probleme können diverse Ursachen haben und werden durch elektrische Kopplung, galvanische Kopplungen, magnetische Kopplungen und Strahlungskopplungen (Koppelmechanismen, Koppelpfade) von einer elektromagnetischen Umgebung (Störquelle) zu einem Empfänger (Störsenke) übertragen [2].

Der hier betrachtete Rahmen beschränkt sich auf durch elektrische und magnetische Koppelmechanismen auftretende EMV-Probleme.

Wie in [2] beschrieben, wird zur Identifikation der Koppelmechanismen ein ho-

hes Verständnis des Systems erforderlich und somit wird zur Lösung derartiger EMV-Probleme klassisch ein erfahrener EMV-Ingenieur¹ benötigt.

In den Arbeiten [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9] wurde eine Methode entwickelt, die es den Ingenieuren erleichtert, Einblicke in das System zu bekommen und Kopfpfade im mittleren Frequenzbereich (bis ca. 100 MHz) zu identifizieren. Im Weiteren wird dieses Verfahren als Traub-Potratz'sches Verfahren bezeichnet. Bei dieser Methode wird aus einem 3D Modell ein äquivalentes Ersatzschaltbild (EESB) extrahiert, welches aus DC-Widerständen, Kapazitäten und partiellen Induktivitäten besteht und die für die EMV-Probleme verantwortlichen parasitären Elemente enthält. Dieses Verfahren ist vergleichbar mit Modellordnungs-Reduktions-Verfahren [10] und Partial Equivalent Electrical Circuit (PEEC) Ansätzen [11], [12]. Das Traub-Potratz'sche Verfahren stellt insofern eine Erweiterung des Traub'schen Verfahren dar, als dass die Induktivitäten nicht direkt aus den Eigenmoden, sondern über die Methode der kleinsten Quadrate aus den Impedanzen bestimmt werden. Außerdem werden dem Netzwerk noch extrahierte statische Kapazitäten und DC-Widerstände hinzugefügt. Dies verbessert die Robustheit des Extraktionsverfahrens. Der besondere Fokus in diesem Verfahren liegt jedoch bei der Interpretierbarkeit des extrahierten Netzwerks und bietet folgende Vorteile:

- Positive Elementstempel
- Das ursprüngliche funktionale Netzwerkmodell ist in dem extrahierten Ersatzschaltbild enthalten.
- Das extrahierte Ersatzschaltbild behält eine physikalische Interpretierbarkeit, in dem Sinne, dass einzelne Elemente mit geometrischen Bereichen assoziiert werden können. Auch Kopplungen zwischen einzelnen Geometriebereichen tauchen als Elemente zwischen den einzelnen Knoten auf.
- Ingenieure der Elektrotechnik sind im Umgang mit Ersatzschaltbildern vertraut.
- Elektrische Netzwerke können schneller und effizienter berechnet werden als Feldmodelle.

¹ Aufgrund der besseren Lesbarkeit wird auf die Form Ingenieur/in verzichtet. Es sind jedoch ausdrücklich sowohl Ingenieure als auch Ingenieurinnen gemeint.

Die bei der Extraktion verwendeten Näherungen der Maxwellgleichungen und simplifizierte Annahmen führen zu den folgenden Nachteilen:

- Im Vergleich mit Feldmodellen ist das extrahierte Ersatzschaltbild weniger genau. Die Gültigkeit erstreckt sich dabei bis zu einem mittleren Frequenzbereich.
- Höherfrequente Effekte, wie z.B. der Skin-Effekt, können ohne Weiteres nicht abgebildet werden.

Die Möglichkeit, Koppelmechanismen mit geometrischen Bereichen assoziieren zu können und die Werte des Ersatzschaltbildes zu kennen, ist hilfreich für den Ingenieur [13]. Dies liefert jedoch keinen direkten Hinweis, an welchen Stellen das Layout modifiziert werden muss, um eine Verbesserung des EMV-Verhaltens zu erreichen. Der dabei benötigte Zusammenhang zwischen Änderung von Geometrieparametern und die damit verbundene Änderung von Ersatzschaltbildgrößen wird als Sensitivität bezeichnet. Es stellt sich somit die Frage, wie diese Sensitivitäten berechnet werden können.

1.2 Stand der Forschung

Die Berechnung von Sensitivitäten bzgl. der Änderungen von Geometrieparametern kann für einzelne Flächen auf Feldebene mit CST MICROWAVE STUDIO[®] berechnet werden.

Das Traub-Potratz'sche Verfahren ermöglicht die Extraktion von äquivalenten Ersatzschaltbildern aus hoch genauen Feldmodellen. Dieses Verfahren liefert zunächst keine Sensitivitäten. Für die Identifikation von sensitiven Netzwerkelementen bzgl. der charakteristischen Größen (QoI=Quantities of Interest) können kommerzielle Programme wie z. B. Cadence[®] PSpice[®] oder Synopsis Saber[®] verwendet werden.

Ein Verfahren, welches die Sensitivitäten von extrahierten parasitären Ersatzschaltbildelementen bzgl. Änderungen der Geometrieparameter berechnen kann und gleichzeitig die geometrische Interpretierbarkeit behält, existiert bisher nicht.

1.3 Wissenschaftliche Fragestellungen

Um eine Verbesserung des EMV-Verhaltens durch gezielte Geometriemodifikationen zu erreichen, werden Sensitivitäten benötigt. Dabei stellen sich die folgenden Fragen:

- Ist es möglich, die Änderung von Geometrieparametern auf einzelne extrahierte Ersatzschaltbildelemente abzubilden?
- Wie kann eine große Zahl derartiger Sensitivitäten auf effiziente Weise bereitgestellt werden?
- Kann die Interpretierbarkeit auf die Sensitivitäten übertragen werden?
- Wie können die geometrischen Sensitivitäten genutzt werden, um die Geometrie bzgl. einer oder mehrerer EMV-relevanter Zielgrößen zu optimieren?

1.4 Inhalt und Kapitelübersicht der Dissertation

Die Gliederung der Arbeit ergibt sich wie folgt:

In Kapitel 2 wird der Extraktionsprozess eines äquivalenten Ersatzschaltbildes aus einem 3D-Feldmodell beschrieben. Die Extraktion wird, abhängig vom jeweiligen Element, in verschiedenen Näherungen der Maxwellgleichungen durchgeführt. Mit Hilfe der daraus bestimmten Feldlösungen werden die Parameter des Ersatzschaltbildes bestimmt.

In Kapitel 3 wird zu den Konzepten aus Kapitel 2 eine Sensitivitätsanalyse auf mehreren Ebenen entwickelt. Die Sensitivitätsanalyse auf Netzwerkebene ermöglicht die Identifikation von sensitiven Ersatzschaltbildparametern bzgl. einer Zielgröße und die Möglichkeit, Wirkmechanismen innerhalb zu untersuchen. Die geometrische Sensitivitätsanalyse sagt voraus, wie sich ein Ersatzschaltbildparameter verändert, wenn ein Geometrieparameter geändert wird. Die Berechnung wird mittels eines adjungierten Verfahrens durchgeführt. Die Kombination der Sensitivitätsanalysen ergeben die Sensitivitäten der Quantities of Interest (QoIs). Diese sagen vorher, wie die QoIs durch die Änderung eines Geometrieparameters beeinflusst werden.

In Kapitel 4 werden die beschriebenen Extraktionsverfahren und die Berechnung von Sensitivitäten an akademischen Beispielen getestet, und es werden Konvergenzuntersuchungen durchgeführt.

In Kapitel 5 werden die in Kapitel 2 beschriebenen Extraktionsverfahren und die Sensitivitätsanalyse an der Realisierung eines EMI-Filters demonstriert und die Optimierung bzgl. des Effekts der Inductance Cancellation durchgeführt. Bei diesem Effekt wird durch Auslöschung des Summenstromes im Kondensator eine Verbesserung der Gegentaktdämpfung erreicht. Mit der Sensitivitätsanalyse auf Netzwerkebene wird der Wirkmechanismus der Inductance Cancellation auf Ersatzschaltbildebene nachvollzogen. Die Sensitivitäten der QoIs werden genutzt, um den Zustand der Inductance Cancellation (Optimum) zu finden. Zudem wird das adjungierte Verfahren bzgl. seiner Performanz untersucht.

2 Extraktion von Äquivalenten Ersatzschaltbildern

Für die Behebung von EMV-Problemen in elektrischen Geräten müssen parasitäre Verkopplungen identifiziert werden, was mit der Extraktion eines äquivalenten Ersatzschaltbildes aus dem Feldmodell gelingen kann. In diesem Kapitel werden die Extraktionsverfahren behandelt, wie sie in [3], [4], [5], [6] beschrieben, in [7], [8], [9] weitergeführt und in [12], [14], [15] zusammengefasst wurden. Diese Extraktionsverfahren bilden die Basis für die Sensitivitätsanalyse in Abschnitt 3.

Es hat sich gezeigt, dass eine robuste Extraktion im mittelfrequenten Bereich von extrahierten äquivalenten Ersatzschaltbildern (EESB) erreicht wird, indem ohm'sche Verluste (DC-Widerstände) in der magnetostatischen Näherung der Maxwellgleichungen, statische Kapazitäten in der elektrostatischen Näherung und Induktivitäten und Koppelfaktoren in Darwin's Näherung extrahiert werden.

Der Extraktionsprozess beruht auf dem in Abb. 1 dargestellten Prozess. Das 3D CAD-Modell wird aus dem funktionellen ESB erzeugt. Innerhalb dieses Modells werden sogenannte Terminals gesetzt, welche wiederum den Knoten im späteren äquivalenten Ersatzschaltbild entsprechen und die Topologie vorgeben. Durch Bestimmen der Feldlösungen in den einzelnen Näherungen der Maxwellgleichungen [16] können Größen im 3D-Modell bestimmt werden, die eine Äquivalenz auf der Ersatzschaltbildebene besitzen.

- Im Falle der statischen Kapazitäten ist dies die elektrostatische Feldenergie und die in einem Kondensator gespeicherte elektrische Energie.
- Im Falle der DC-Widerstände werden die Ohm'sche Verlustleistung im 3D-Modell und die am Widerstand umgesetzte Leistung als äquivalent angenommen.
- Im Falle der Induktivitäten sind es die Impedanzen des 3D-Modells und die Impedanz eines L - C -Elements.
- Im Falle der Äquivalenten parallelen Kapazitäten (engl. Equivalent Parallel Capacitances, EPCs) sind es die Eigenmoden des 3D-Modells und die Eigenmoden des Ersatzschaltbildes.

Nach der Extraktion sind die funktionellen und parasitären Elemente des Systems bekannt. Zusammen mit der Topologie zwischen den Knoten kann daraus ein EESB erzeugt werden, das das Verhalten des Geräts richtig abbildet.

2.1 Feldgleichungen

Bei der Extraktion von Ersatzschaltbildelementen muss ein Zusammenhang zwischen feldtheoretischen, elektromagnetischen Größen und Ersatzschaltbildelementen wie Widerständen, Induktivitäten und Kapazitäten hergestellt werden. Die den elektromagnetischen Größen zu Grunde liegenden elektromagnetischen Phänomene werden durch die Maxwellgleichungen oder passende Näherungen beschrieben. Der Rahmen der Ausarbeitung soll sich hier auf jene Teile beschränken, welche für die Extraktion und die Berechnung der Sensitivitäten benötigt werden. Eine ausführliche Diskussion der Maxwellgleichungen und geeigneten Formulierungen kann, um einige zu nennen, in den Werken [17], [18], [19], [20] gefunden werden.

Ausgangspunkt der Betrachtungen ist die differentielle Form der makroskopischen Maxwellgleichungen [17] im Frequenzbereich:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + s\mathbf{D} \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -s\mathbf{B} \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.4)$$

Hier beschreibt \mathbf{E} die elektrische Feldstärke, \mathbf{D} die elektrische Flussdichte, \mathbf{H} die magnetische Feldstärke, \mathbf{B} die magnetische Flussdichte, \mathbf{j} die Stromdichte, ρ die Ladungsdichte, $s = i\omega$ die komplexwertige Laplace-Variable und ω die Kreisfrequenz.

Die Materialbeziehungen zwischen Flussdichten und Feldstärken sind gegeben durch:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (2.5)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad ,$$

mit der Permittivität ε und der Permeabilität μ . Die Kontinuitätsgleichung berücksichtigt die Ladungserhaltung in einem System:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (2.6)$$

Gl. (2.4) drückt aus, dass \mathbf{B} ein divergenzfreies Feld ist und durch das magnetische Vektorpotential \mathbf{A} angesetzt werden kann:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad . \quad (2.7)$$

Unter Ausnutzung dieses Ansatzes kann mit Hilfe des Faraday'schen Gesetzes (Gl. 2.2) die folgende Relation für das elektrische Feld \mathbf{E} abgeleitet werden:

$$\mathbf{E} = -s\mathbf{A} - \nabla \varphi \quad , \quad (2.8)$$

mit φ dem elektrischen Potential.

Darwin-Modell

Wird das Ampère'sche Gesetz um den Maxwell'schen Verschiebungsstrom $s\mathbf{D}$ erweitert, so ergibt sich das in Gl. (2.1) dargestellte Maxwell-Ampère'sche Gesetz.

Um Darwin's Näherung der Maxwellgleichungen zu erhalten, wird zunächst das elektrische Feld \mathbf{E} im Maxwell-Ampère'schen Gesetz mit Hilfe der Helmholtz'schen Zerlegung [19] in rein wirbelbehaftete (\mathbf{E}_W) und in rein divergenzbehaftete (\mathbf{E}_D) Anteile aufgespalten:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + s\varepsilon (\mathbf{E}_D + \mathbf{E}_W) \quad (2.9)$$

Die im Darwin-Modell enthaltenen Ströme werden als eingeprägte Ströme oder perfekt leitende Anteile betrachtet. Die ohm'schen Phänomene werden später in dem extrahierten Netzwerk durch DC-Widerstände berücksichtigt. Im Darwin-Modell wird der wirbelbehaftete Anteil \mathbf{E}_W des elektrischen Feldes im Maxwell-Ampère'schen Gesetz vernachlässigt, woraus sich das „Ampère-Darwin'sche“ Gesetz ergibt [20]:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{A}) = \mathbf{j} + s\varepsilon (\mathbf{E}_D) \quad (2.10)$$

Da das elektrische Feld \mathbf{E}_D nur wirbelfreie Anteile enthält, kann dieses durch den negativen Gradienten eines skalaren Feldes dargestellt werden:

$$\nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{A}) + s\varepsilon \nabla \varphi = \mathbf{j} \quad (2.11)$$

Das Darwin-Modell besitzt eine instantane Feldausbreitung und kann sowohl induktive als auch kapazitive Phänomene beschreiben [20]. Diese Näherung findet Verwendung in niederfrequenten Plasmasimulationen [21] und eignet sich zur Extraktion von partiellen Induktivitäten wie auch Kapazitäten [3].

Elektro- und Magnetostatik

Durch die Entkopplung der elektromagnetischen Felder am DC-Punkt ($s \rightarrow 0$) zerfallen die Maxwellgleichungen in die beiden Grenzfälle der Magneto- und Elektrostatik [19]. In der Elektrostatik ist das elektrische Feld \mathbf{E} wirbelfrei und wird durch die folgenden Gleichungen beschrieben:

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (2.12)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad . \quad (2.13)$$

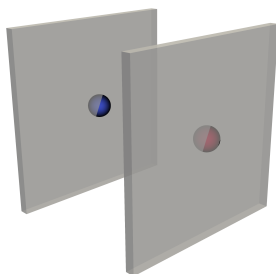
Die Magnetostatik ist durch das Ampère'sche Gesetz und die Tatsache, dass die magnetische Flussdichte \mathbf{B} divergenzfrei ist, beschrieben. Dies kann mit den folgenden Gleichungen beschrieben werden:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} \quad (2.14)$$

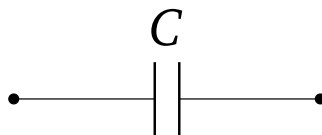
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad , \quad (2.15)$$

Die darin enthaltene Stromdichte \mathbf{j} erfüllt die Kontinuitätsgleichung der Magnetostatik [19]:

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad . \quad (2.16)$$



(a)



(b)

Abbildung 2: a) Darstellung zweier leitender, galvanisch nicht verbundener Platten.

b) Äquivalente Kapazität, welche aus dem 3D-Modell aus Abb. 2a extrahiert wird.

2.2 Statische Kapazitäten

Dieser Unterabschnitt beschäftigt sich mit der Extraktion von statischen Kapazitäten aus 3D-Modellen, wie sie in [15], [9] beschrieben sind.

Die Proportionalitätskonstante, die die Beziehung zwischen der Ladung Q und der Spannung U in einem Kondensator beschreibt, ist die Kapazität C [22]:

$$Q = CU \quad (2.17)$$

Bei der Kapazität C handelt es sich um eine Ersatzschaltbildgröße, welche sich, in Form von elektrostatischen Kapazitäten, aus einem 3D-CAD-Modell extrahieren lassen. Um diese Extraktion durchführen zu können, wird ein Zusammenhang zwischen Feldgrößen der Elektrostatik und Kapazitäten im Ersatzschaltbild hergestellt. Hierzu wird eine Energiebetrachtung sowohl für das 3D-CAD-Modell, als auch für das Ersatzschaltbild durchgeführt. Das Gleichsetzen der Energie aus beiden Modellbetrachtungen führt auf die dem 3D-Modell äquivalente Kapazität C .

Dieses Extraktionsprinzip wird im Folgenden an der Extraktion eines einzelnen Ersatzschaltbildelements (äquivalente Kapazität C) demonstriert und auf ein

System von Kapazitäten erweitert. Hierzu dient das in Abb. 2a dargestellte Modell eines Plattenkondensators, welches aus zwei galvanisch nicht verbundenen, leitfähigen Platten besteht.

Zuerst wird die im Volumen gespeicherte elektrische Energie W_{3D} des Plattenkondensators ermittelt. Diese ist für ein lineares Dielektrikum durch das elektrostatische Feld \mathbf{E} und die Verschiebungsstromdichte \mathbf{D} bestimmt [17] und ergibt sich zu²:

$$W_{3D} = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dV \quad (2.18)$$

$$= \frac{1}{2} \int_V \epsilon \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi dV \quad (2.19)$$

Somit kann bei bekanntem räumlichen Potential $\varphi(\mathbf{r})$ und bekannter Permittivität ϵ der Wert von W_{3D} berechnet werden.

Ausgangspunkt zur Berechnung der Potentialverteilung $\varphi(\mathbf{r})$ ist die Grundgleichung der ladungsfreien Elektrostatik [19] mit Dirichlet-Randbedingungen an beiden Platten und homogenen Neumann-Randbedingungen Γ_{Neum} an den Randteilen:

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (\epsilon(\mathbf{r}) \nabla \varphi(\mathbf{r})) &= 0 && \text{Dirichlet-Randbedingungen:} \\ \varphi(\mathbf{r}) &\text{ bekannt auf dem Randteil } \Gamma_{\text{Dir}} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Die numerische Lösung dieses Randwertproblems wird mit einem Finite-Elemente Ansatz durchgeführt, in welchem das Potential $\varphi(\mathbf{r})$ durch eine Linearkombination von Koeffizienten und Basisfunktionen angesetzt wird:

$$\varphi(\mathbf{r}) \approx \sum_{j=1}^N c_j \mathbf{l}_j(\mathbf{r}) \quad , \quad (2.21)$$

wobei $\mathbf{l}_j(\mathbf{r})$ die Basisfunktionen und c_j die Koeffizienten darstellen. Zusätzlich kann gezeigt werden, dass sich Gl. (2.20) mit Hilfe der schwachen Formulierung

² Das elektrostatische Feld \mathbf{E} kann in der Elektrostatik als negativer Gradient eines skalaren Potentials φ dargestellt werden.

und den Testfunktionen $l_i(\mathbf{r})$ bei dem $l_i(\mathbf{r}) = 0$ für $\mathbf{r} \in \Gamma_{\text{Dir}}$ als Volumenintegral

$$-\int_V \nabla \cdot \left(\varepsilon(\mathbf{r}) \nabla \varphi(\mathbf{r}) \right) l_i(\mathbf{r}) \, dV = 0 \quad (2.22)$$

über das Raumgebiet V darstellen lässt [23]. Mit Hilfe von Vektoridentitäten und dem Satz von Gauß kann für die obige Gleichung gezeigt werden,

$$\int_V \left(\varepsilon(\mathbf{r}) \nabla \varphi(\mathbf{r}) \right) \cdot \nabla l_i(\mathbf{r}) \, dV = \int_{\Gamma} \varepsilon(\mathbf{r}) \frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial n} l_i(\mathbf{r}) \, dA \quad (2.23)$$

wobei $\Gamma = \partial V$ dem Rand des Gebietes und $\frac{\partial}{\partial n}$ der Ableitung normal zum Rand entspricht. Es werden nur homogene Neumann-Randbedingungen und Dirichlet-Randbedingungen verwendet. An den homogenen Neumann-Randbedingungen gilt:

$$\int_{\Gamma_{\text{Neu}}} \varepsilon(\mathbf{r}) \frac{\partial \varphi}{\partial n} l_i \, dA = 0 \quad (2.24)$$

Durch Einsetzen des Finite-Elemente Ansatzes ergibt sich Gl. (2.23) zu:

$$\sum_j c_j \underbrace{\int_V (\varepsilon \nabla l_j) \cdot \nabla l_i \, dV}_{\mathcal{L}_{ij}^\varepsilon} = \sum_j c_j \underbrace{\int_{\Gamma_{\text{Dir}}} \varepsilon \frac{\partial l_j}{\partial n} l_i \, dA}_{\mathbf{b}_i} \quad (2.25)$$

D.h. es ergibt sich das Gleichungssystem:

$$\mathcal{L}^\varepsilon \mathbf{c} = \mathbf{b} \quad (2.26)$$

Die Aufteilung des Gleichungssystems in Koeffizienten c_j (ab jetzt Freiheitsgrade genannt), welche zu den gesuchten Potentialen \mathbf{c}_u gehören, und Koeffizienten \mathbf{c}_d , die durch die Dirichlet Ränder vorgegeben sind, ergibt:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{L}_{uu}^\varepsilon & \mathcal{L}_{ud}^\varepsilon \\ \mathcal{L}_{du}^\varepsilon & \mathcal{L}_{dd}^\varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}_u \\ \mathbf{c}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_u \\ \mathbf{b}_d \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Die Testfunktionen sind 0 auf dem Randteil Γ_{Dir} . Deshalb ist:

$$b_u = \sum_j c_j \int_{\Gamma_{\text{Dir}}} \varepsilon \frac{\partial l_j}{\partial n} l_i \, dA = 0 \quad . \quad (2.28)$$

Mit dieser Eigenschaft ergibt sich die Aufteilung aus (2.27) zu:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{L}_{uu}^\varepsilon & \mathcal{L}_{ud}^\varepsilon \\ \mathcal{L}_{du}^\varepsilon & \mathcal{L}_{dd}^\varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}_u \\ \mathbf{c}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{b}_d \end{bmatrix} \quad , \quad (2.29)$$

Zur Berechnung der Freiheitsgrade \mathbf{c}_u ist eine Betrachtung des ersten Teilgleichungssystems ausreichend:

$$\mathcal{L}_{uu}^\varepsilon \mathbf{c}_u = -\mathcal{L}_{ud}^\varepsilon \mathbf{c}_d \quad . \quad (2.30)$$

Durch Lösen des Gleichungssystems kann das diskrete Potential \mathbf{c} des Systems ermittelt werden. Bei bekanntem Potential \mathbf{c} kann mit Gl. (2.18) gezeigt werden, dass die elektrische Energie des Systems durch folgenden Ausdruck berechnet werden kann:

$$W_{3D} = \frac{1}{2} \mathbf{c}^T \mathcal{L}^\varepsilon \mathbf{c} = \frac{1}{2} \sum_j \sum_i c_i \mathcal{L}_{ij} c_j \quad (2.31)$$

Dagegen ist die Energie im Ersatzschaltbild durch die am Kondensator entstehende Potentialdifferenz U_C und die Kapazität C bestimmt:

$$W_{ESB} = \frac{1}{2} C U_C^2 \quad (2.32)$$

Werden die Energien aus Gl. (2.31) und (2.32) gleichgesetzt, so ergibt sich die äquivalente Kapazität C zu:

$$C = \frac{\mathbf{c}^T \mathcal{L}^\varepsilon \mathbf{c}}{U_C^2} \quad (2.33)$$

Somit ist eine Relation gefunden, die einer 3D-Struktur eine äquivalente statische Kapazität C zuordnet.³

Dieses Verfahren soll auf ein Netzwerk mit N Knoten verallgemeinert werden. Dies führt auf eine $(N - 1) \times (N - 1)$ Kapazitätsmatrix mit $M = N(N - 1)/2$ unabhängigen Einträgen. Deshalb werden M numerische Experimente durchgeführt. Hierbei werden Potentiale in die, den Knoten zugeordneten 3D Geometrieile eingepägt und jeweils die Energie bestimmt. Diese Potentialanregungen werden dabei linear unabhängig voneinander gewählt. Dies führt zu den folgenden Energien auf Geometrie- und Ersatzschaltbildebene:

$$\mathbf{W}_{3D} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \int_V \mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{E}_1 dV \\ \vdots \\ \frac{1}{2} \int_V \mathbf{D}_M \cdot \mathbf{E}_M dV \end{bmatrix} \quad \mathbf{W}_{EEC} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^M U_{1i}^2 C_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^M U_{Mi}^2 C_i \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

Die Komponenten der Vektoren \mathbf{W}_{3D} und \mathbf{W}_{EEC} entsprechen dabei den jeweiligen Energien des i -ten Experiments. Erneutes Gleichsetzen der Energien und Umschreiben ergibt das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} W_{3D}^1 \\ \vdots \\ W_{3D}^M \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} U_{11}^2 & \cdots & U_{1M}^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ U_{M1}^2 & \cdots & U_{MM}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_M \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

Durch Lösen dieses Gleichungssystems können alle Kapazitäten des Netzwerkes mit N Knoten berechnet werden.

³ Das dargestellte Verfahren lässt sich auf beliebige diskrete 3D Geometrien anwenden.

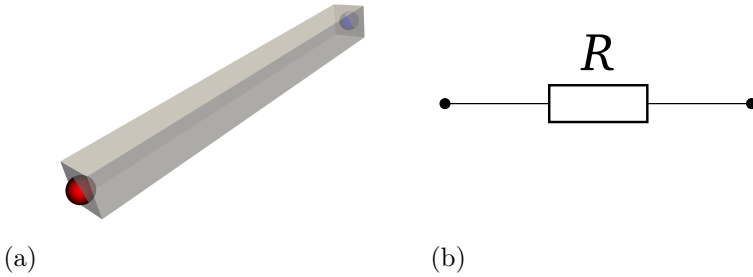


Abbildung 3: a) Repräsentation eines quaderförmigen Drahtes. Die Punkte (rot und blau) entsprechen den Knoten im ESB.
b) Äquivalenter Widerstand, welcher aus dem 3D-Modell aus Abb. 3a extrahiert wird.

2.3 DC Leitwerte

Im Folgenden wird erläutert, wie in [12], [15], [9] aus einem 3D Modell äquivalente DC Leitwerte bzw. DC Widerstände extrahiert werden können.

Bei einem linearen Ohm'schen Leiter sind die Spannung U und der Strom I zueinander proportional [22]:

$$GU = I \qquad U = RI \quad . \qquad (2.36)$$

Bei dem Leitwert G bzw. dem Ohm'schen Widerstand $R = G^{-1}$ handelt es sich wiederum um Ersatzschaltbildgrößen. Eine analoge Vorgehensweise wie in Abschnitt 2.2 wird herangezogen, um DC-Leitwerte zu extrahieren. Hier wird ein Zusammenhang zwischen Feldgrößen des stationären Strömungsfeldes und den DC-Leitwerten gesucht. Die Basis bildet die Annahme der Äquivalenz der Ohm'schen Verlustleistung im 3D-Modell P_{3D} und der Verlustleistung im Leitwert G im Ersatzschaltbild P_{ESB} .

Auch hier soll das Extraktionsprinzip durch die Extraktion eines einzelnen Ersatzschaltbildelements (äquivalenter Leitwert G) demonstriert und auf ein Netzwerk von Leitwerten erweitert werden. Dazu wird das in Abb. 3a dargestellte Modell eines quaderförmigen Drahtes verwendet. Zunächst wird die umgesetzte Verlustleistung im 3D-Modell berechnet, welche durch das elektrokinetische

Feld \mathbf{E} und die Stromdichte \mathbf{j} bestimmt ist. Zusammen mit dem Ohm'schen Gesetz $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ ergibt sich die Leistung zu:

$$P_{3D} = \int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \, dV \quad (2.37)$$

$$= \int_V \sigma \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi \, dV \quad , \quad (2.38)$$

mit der Stromdichte \mathbf{j} und der Leitfähigkeit σ . Somit wird ähnlich zu Abschnitt 2.2 das Potential $\varphi(\mathbf{r})$ benötigt. Ausgangspunkt zur Extraktion der ohm'schen Verlustleistung ist die Kontinuitätsgleichung [19] (siehe Gl. (2.16)) für das stationäre Strömungsfeld $\mathbf{j}(\mathbf{r})$:

$$\nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0 \quad (2.39)$$

Durch Einsetzen des Ohm'schen Gesetzes $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ ergibt sich die Kontinuitätsgleichung zu:

$$-\nabla \cdot (\sigma(\mathbf{r}) \nabla \varphi(\mathbf{r})) = 0 \quad (2.40)$$

Diese Gleichung hat eine ähnliche mathematische Struktur wie Gleichung (2.20) und kann durch den gleichen FE-Ansatz als lineares Gleichungssystem dargestellt werden:

$$\mathcal{L}^\sigma \mathbf{c} = \mathbf{b} \quad \mathcal{L}_{ij}^\sigma = \int_V (\sigma(\mathbf{r}) \nabla l_j(\mathbf{r})) \cdot \nabla l_i(\mathbf{r}) \, dV \quad , \quad (2.41)$$

mit der Leitfähigkeit σ , dem diskretisierten Laplace Operator \mathcal{L}^σ und \mathbf{c} dem diskreten Potential. Mit den Gleichungen (2.37) und (2.41) kann für die Leistung P_{3D} gezeigt werden:

$$P_{3D} = \mathbf{c}^T \mathcal{L}^\sigma \mathbf{c} \quad (2.42)$$

Die Verlustleistung am Leitwert im Ersatzschaltbild ergibt sich zu:

$$P_{ESB} = GU^2 \quad . \quad (2.43)$$

Das Gleichsetzen von (2.42) und dieser Verlustleistung ermöglicht die Extraktion einer äquivalenten Leitfähigkeit G aus der 3D-Geometrie und durch sein Inverses den Widerstand R :

$$G = \frac{\mathbf{c}^T \mathcal{L}^\sigma \mathbf{c}}{U^2} \quad (2.44)$$

Dieses Verfahren soll wiederum auf ein Netzwerk mit N Knoten erweitert werden. Hierbei müssen analog zum letzten Abschnitt M numerische Experimente mit linear unabhängigen Anregungen durchgeführt werden. Hierfür ergibt sich das folgende Leistungssystem, dessen Komponenten den Leistungen des i -ten Experiments entsprechen:

$$\mathbf{P}_{3D} = \begin{bmatrix} \int_V \mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{E}_1 dV \\ \vdots \\ \int_V \mathbf{j}_M \cdot \mathbf{E}_M dV \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_{EEC} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^M U_{1i}^2 G_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^M U_{Mi}^2 G_i \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

Durch Gleichsetzen der Leistungen aus obiger Gleichung und Umschreiben ergibt sich das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{bmatrix} P_{3D}^1 \\ \vdots \\ P_{3D}^M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{11}^2 & \dots & U_{1M}^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ U_{M1}^2 & \dots & U_{MM}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1 \\ \vdots \\ G_M \end{bmatrix}, \quad (2.46)$$

dessen Lösung die Werte der M Leitwerte ergeben.

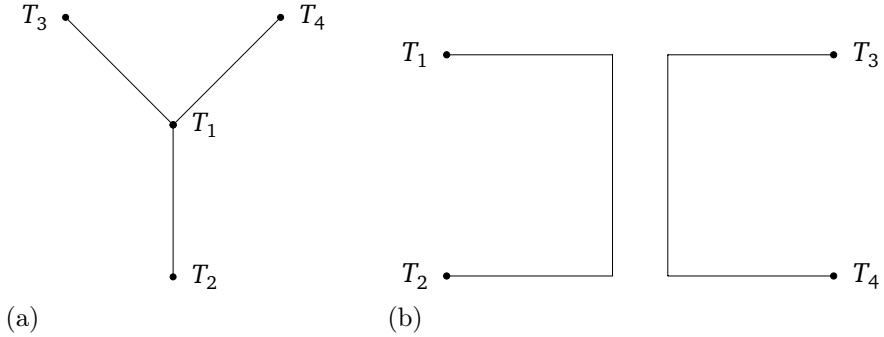


Abbildung 4: a) Sterntopologie eines Netzwerkes mit 4 Knoten
 b) Von der Geometrie vorgegebene Topologie für den Schwingkreis aus Unterabschnitt 4.4.

2.4 Inzidenzmatrix

Für die Durchführung der Extraktionen der partiellen Induktivitäten und der EPCs sowie für die Berechnung der Sensitivitäten wird der Begriff der Inzidenzmatrix und deren Beziehungen zu anderen Netzwerkgrößen benötigt. Ein Ersatzschaltbild besteht aus Knoten und Kanten, welche als gerichteter Graph interpretiert werden können [7] [9] [24] [25]. Der gerichtete Graph wird hier durch die sog. Inzidenzmatrix beschrieben, dessen Einträge definiert sind durch [7] [26]:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{wenn Kante } j \text{ vom Knoten } i \text{ wegführt} \\ -1 & \text{wenn Kante } j \text{ zum Knoten } i \text{ hinführt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.47)$$

Um redundante Informationen aus der Inzidenzmatrix zu entfernen, wird einer der Knoten auf das Referenzpotential 0 gesetzt. Somit kann eine Zeile dieser Matrix gelöscht werden, welche dann die reduzierte Inzidenzmatrix genannt wird [3].

Die erste Kirchhoff'sche Regel kann mit Hilfe dieser Inzidenzmatrix \mathbf{A} wie folgt aufgeschrieben werden:

$$\mathbf{A}\mathbf{I} = \mathbf{0} \quad ; \quad (2.48)$$

mit dem Strom \mathbf{I} . Die Spannungen an den Kanten sind gegeben durch

$$\mathbf{U} = \mathbf{A}^T \boldsymbol{\phi} \quad , \quad (2.49)$$

wobei die Elemente des Vektors $\boldsymbol{\phi}$ den Potentialen auf den Knoten entsprechen. Die Inzidenzmatrizen werden in Unterabschnitt 2.5 benötigt, um aus den Admittanzen einer Sterntopologie die Induktivität einer anderen, durch die 3D-Struktur gegebenen Topologie zu berechnen. Ohne die Erklärungen des folgenden Abschnittes vorweg zu nehmen, ergibt sich die Admittanzmatrix \mathbf{Y} zu [5]:

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{i\omega} \mathbf{A}_{LC}^+ \mathbf{L}^{-1} (\mathbf{A}_{LC}^+)^T + i\omega \mathbf{A}_{LC}^+ \mathbf{C} (\mathbf{A}_{LC}^+)^T \quad (2.50)$$

Wie in [3] beschrieben, existiert die Pseudoinverse \mathbf{A}_{LC}^+ der Inzidenzmatrix für ein Netzwerk mit $n+1$ Knoten, m Kanten und c unabhängigen Schleifen unter der folgenden Bedingung:

$$m - c < n \quad . \quad (2.51)$$

Die Topologie des zu extrahierenden Ersatzschaltbildes wird so gewählt, dass diese Bedingung erfüllt ist [9].

Als Beispiel für eine Inzidenzmatrix wird der Schwingkreis aus Unterabschnitt 4.4 betrachtet. Die Admittanzen bzw. Impedanzen wurden aus der 3D-Struktur für die in Abb. 4a dargestellte Sterntopologie für 4 Knoten bestimmt. Die 3D-Struktur gibt die in Abb. 4b dargestellte Topologie vor.

Die benötigte Inzidenzmatrix A_{LC} bzw. ihre reduzierte Form aus (2.50) ergeben sich zu:

$$\begin{array}{cc}
 \text{Knoten} & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\
 \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{array} \right]
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{cc}
 \text{Knoten} & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\
 \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \left[\begin{array}{cc} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{array} \right]
 \end{array}
 \quad (2.52)$$

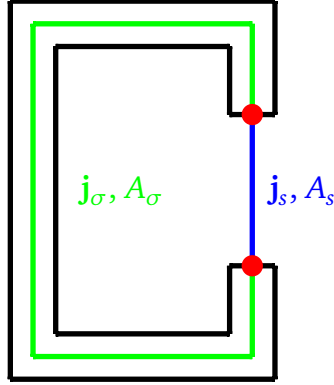


Abbildung 5: Schematische Darstellung eines rechteckigen offenen Leiters. Die angedeuteten Strompfade werden in Anteile der Struktur (Subskript σ) und der Stromanregung (Subskript s) separiert. Die Anteile der Stromanregung sind kein Teil des 3D-Modells.

2.5 Partielle Induktivitäten

Dieser Unterabschnitt soll eine Zusammenfassung über das in [3], [4], [5], [6], [8] beschriebene Extraktionsverfahren von partiellen Induktivitäten und das dazu notwendige Gleichungssystem sein. Zusätzlich soll die vorgeschlagene Verwendung der Impedanzen dieses Systems zur Berechnung der partiellen Induktivitäten beschrieben werden (siehe [9] und folgend [12], [14], [15]). Das Extraktionsverfahren soll zunächst an einer einzelnen Induktivität L betrachtet werden, wie sie in Abb. 5 für einen rechteckigen offenen Leiter skizziert ist. Anschließend wird die Extraktion auf ein System, bestehend aus mehreren Induktivitäten, erweitert.

Gemäß dem Faraday'schen Induktionsgesetz induziert ein zeitlich veränderlicher magnetischer Fluss Φ durch eine geschlossene Schleife eine Spannung [22]:

$$U_{\text{ind}} = \frac{d\Phi}{dt} = L \frac{dI}{dt} \quad , \quad (2.53)$$

bei dem Effekte durch ferromagnetische Sättigung vernachlässigt werden. Die Proportionalitätskonstante L , welche die Beziehung zwischen dem magnetischen Fluss und dem Strom I ($I \neq 0$) durch die Schleife $c = \partial F$ mit der Fläche F beschreibt, ist die Eigeninduktivität [22] [27]:

$$L_{11} = \frac{\Phi_1}{I_1} = \frac{1}{I_1} \int_c \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (2.54)$$

Ein durch einen Leiter j fließender Strom I_j führt in einem anderen Leiter i zu einem gekoppelten Fluss Φ_i , was durch eine Gegeninduktivität

$$M_{ij} = L_{ij} = \frac{\Phi_i}{I_j} \quad (2.55)$$

beschrieben wird [22], [27]. Die so definierten Größen der Eigen- und Gegeninduktivitäten gelten für geschlossene Stromkreise. Durch das Konzept der partiellen Induktivitäten lassen sich diese Größen auch für Segmente beschreiben [27]:

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{1}{I} \sum_i^N \int_c \mathbf{A}_i \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{I} \int_{c_1} \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{l} + \frac{1}{I} \int_{c_2} \mathbf{A}_2 \cdot d\mathbf{l} + \dots + \frac{1}{I} \int_{c_N} \mathbf{A}_N \cdot d\mathbf{l} \quad ; \quad (2.56)$$

Um aus einem 3D-Modell diese partiellen Induktivitäten extrahieren zu können, muss ein Zusammenhang zwischen dem Feldmodell und den Induktivitäten in einem Ersatzschaltbild hergestellt werden. Die folgenden Gesichtspunkte und entwicklungshistorische Gründe haben zur Wahl des in 2.1 erwähnten Darwin-Modells geführt:

- Wie in [3] angemerkt, enthalten die Maxwellgleichungen Effekte wie z.B. Wellenausbreitung, die von einzelnen Ersatzschaltbildelementen eines Netzwerks nicht abgebildet werden können.
- Ein magnetoquasistatisches Modell berücksichtigt nur induktive, aber keine kapazitiven Phänomene [20]. Dies macht eine gleichzeitige Extraktion von sog. äquivalenten parallelen Kapazitäten (siehe 2.6) unmöglich.

Im Darwin-Modell dagegen sind sowohl kapazitive als auch induktive Phänomene enthalten [20].

Ausgangspunkt zur Berechnung der partiellen Induktivitäten ist das „Ampère-Darwin’sche-Gesetz“ aus Gl. (2.11):

$$\nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{A}) + s\varepsilon \nabla \varphi = \mathbf{j} \quad . \quad (2.57)$$

Da das Vektorpotential \mathbf{A} nicht eindeutig bestimmt ist, muss zusätzlich eine Eichung vorgenommen werden. Wie in [3] begründet, wird, um der PEEC Methode zu entsprechen, eine „Lorenz-artige“ Eichung verwendet, welche die obige Gleichung zu dem folgenden System von Gleichungen erweitert:

$$\begin{aligned} \nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{A}) + s\varepsilon \nabla \varphi &= \mathbf{j} \\ \nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{A}) + s\varepsilon^2 \mu \varphi &= 0. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Dieses System von Gleichungen eignet sich, um Induktivitäten zu extrahieren, jedoch noch nicht, um partielle Induktivitäten zu extrahieren. Hierzu müssen noch, wie in Gl (2.56) beschrieben, die Stromdichte \mathbf{j} und das Vektorfeld \mathbf{A} in Anteile der Struktur (Subskript σ) und Anteile des anregenden Strompfades (Subskript s) durch das Superpositionsprinzip aufgeteilt werden (siehe Abb. 5):

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_\sigma + \mathbf{A}_s \quad \varphi = \varphi_\sigma + \varphi_s \quad \mathbf{j} = \mathbf{j}_\sigma + \mathbf{j}_s \quad (2.59)$$

Die Gleichungen (2.58) lassen sich jetzt in Anteile der Struktur und in Anteile der Anregungen separieren. Für die Anregung aus der zweiten Gleichung ergibt sich im Fall einer konstanten Permittivität

$$\nabla \cdot \mathbf{A}_s = -s\varepsilon \mu \varphi_s = g \quad , \quad (2.60)$$

wodurch das Hilfsfeld g definiert wird. Für die Anregung aus der ersten Gleichung ergibt sich durch Anwendung des Divergenzoperators für konstante Materialparameter:

$$\nabla \cdot (\mu^{-1} \nabla g) = -\nabla \cdot \mathbf{j}_s \quad . \quad (2.61)$$

An den Elektroden liegen die anregenden Potentiale als Dirichlet-Randbedingungen an. Überall sonst liegen homogene Neumann-Randbedingungen an. Das Hilfsfeld \mathbf{g} wird dann in die Gleichung (2.58) eingesetzt, die jetzt durch Anteile der Struktur $(\mathbf{A}_\sigma, \varphi_\sigma)$ ausgedrückt werden. Wiederum werden diese Gleichungen als Funktion von \mathbf{A}_σ und φ ausgedrückt. Auf diese Weise ergibt sich das folgende, zur Beschreibung von partiellen Induktivitäten geeignete System für stückweise konstante Materialien [3], [9]:

$$\begin{aligned}\nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{A}_\sigma) + s\varepsilon \nabla \varphi &= \mathbf{j}_\sigma - \nabla (\mu^{-1} g) \\ \nabla \cdot \mathbf{A}_\sigma + s\varepsilon \mu \varphi &= -g,\end{aligned}\quad (2.62)$$

wobei das elektrische Hilfsfeld gegeben ist durch $\mathbf{E}_\sigma := -s\mathbf{A}_\sigma - \nabla \varphi$. Das eingeführte Hilfsfeld $g = \nabla \cdot \mathbf{A}_\sigma$ wird durch die folgende Poisson-artige Gleichung über die Divergenz des eingepägten Stromes definiert:

$$\nabla \cdot (\mu^{-1} \nabla g) = -\nabla \cdot \mathbf{j}_\sigma \quad (2.63)$$

Durch die zusätzliche Annahme von perfekt leitenden Strukturen ($\mathbf{j}_\sigma = 0$) kann die obige Gleichung in die folgende (\mathbf{E}, φ) - Formulierung überführt werden [3], [9]:

$$\begin{bmatrix} \nabla \cdot \varepsilon \nabla & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^2 \varphi \\ \mathbf{E}_\sigma \end{bmatrix} + s^2 \begin{bmatrix} -\varepsilon^2 \mu & \varepsilon \nabla \cdot \\ \varepsilon \nabla & -\nabla \times \mu^{-1} \nabla \times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^2 \varphi \\ \mathbf{E}_\sigma \end{bmatrix} = s^3 \begin{bmatrix} \varepsilon g \\ -\nabla \mu^{-1} g \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

Nach der Diskretisierung im Raum durch die Finite-Elemente (FE) Methode findet sich:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{S}_{\varphi\varphi} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{S}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}_\varphi \\ \mathbf{x}_\mathbf{E} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + s^2 \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{T}_{\varphi\varphi} & \mathbf{T}_{\mathbf{E}\varphi} \\ \mathbf{T}_{\mathbf{E}\varphi} & \mathbf{T}_{\mathbf{E}\mathbf{E}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}_\varphi \\ \mathbf{x}_\mathbf{E} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = s^3 \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{y}_\varphi \\ \mathbf{y}_\mathbf{E} \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}} \quad (2.65)$$

Dieses lineare Gleichungssystem wird im folgenden abgekürzt durch:

$$(\mathbf{S} + s^2 \mathbf{T}) \mathbf{x} = \mathbf{y} \quad , \quad (2.66)$$

wobei die Matrizen \mathbf{S} und \mathbf{T} durch die Methode der finiten Elemente aus den Operatoren aus (2.64) assembliert werden. Hieraus lassen sich die Freiheitsgra-

de der Feldlösung \mathbf{x} bestimmen, mit welcher sich die Impedanz zwischen zwei Knoten zu einer gegebenen Frequenz bestimmen lässt:

$$\mathbf{Z}(s) = s^{-2} (\mathcal{P} \mathbf{x}) I^{-1} \quad (2.67)$$

Der Projektionsoperator \mathcal{P} verknüpft die FE-Potentiale φ mit den Spannungen entlang einer Kante im Netzwerkmodell und I bezeichnet den Strom. Die Verallgemeinerung auf ein Knotensystem, bestehend aus N partiellen Induktivitäten, führt auf eine Impedanzmatrix \mathbf{Z} [14]. Um diese zu bestimmen, werden die N Feldlösungen aus N linear unabhängigen Anregungen berechnet. Die Einträge dieser Impedanzmatrix entsprechen den Impedanzen zwischen jeweils zwei Knoten, welche sich auf Ersatzschaltbildebene durch ein L - C -Element (Abb. 6) approximieren lassen. Es hat sich gezeigt, dass diese Approximation bis unterhalb der ersten Resonanzfrequenz des Systems gültig ist. Für die Impedanzmatrix \mathbf{Z} ergibt sich somit:

$$\mathbf{Z}(s) = ((s\mathbf{L})^{-1} + s\mathbf{C})^{-1} \quad . \quad (2.68)$$

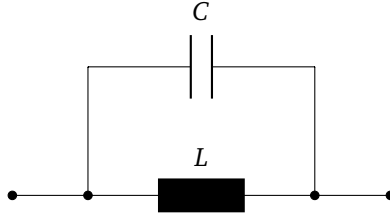


Abbildung 6: L - C -Element, welches benutzt wird, um Induktivitäten und Kapazitäten aus der ermittelten Impedanz zu extrahieren.

Durch die Berechnung der Impedanzmatrizen an verschiedenen Frequenzpunkten ω_i kann mittels der Methode der kleinsten Fehlerquadrate (engl. Least Square Fit) die Induktivitätsmatrix \mathbf{L} bestimmt werden. Für die Admittanzmatrix ($\mathbf{Y} = \mathbf{Z}^{-1}$) ergibt sich die Methode der kleinsten Fehlerquadrate wie folgt [28]:

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{i\omega} \tilde{\mathbf{L}}^{-1} + i\omega \tilde{\mathbf{C}} \quad . \quad (2.69)$$

Methode der kleinsten Quadrate:

$$\mathbf{M}^T \mathbf{M} \mathbf{x} = \mathbf{M}^T \mathbf{b} \quad (2.70)$$

$$\mathbf{x}_{LC} = (\mathbf{M}^T \mathbf{M})^{-1} \mathbf{M}^T \mathbf{b} \quad ; \quad (2.71)$$

mit:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega_1} & \omega_1 \\ \vdots & \vdots \\ \frac{1}{\omega_N} & \omega_N \end{pmatrix} \quad . \quad (2.72)$$

Die so extrahierte Induktivitätsmatrix \mathbf{L} enthält die Eigeninduktivitäten L_{ii} und die Gegeninduktivitäten L_{ij} . Ein Maß für die gegenseitige Einkopplung zweier Induktivitäten ist der sog. Koppelfaktor k_{ij} , welcher für ein Knotenpaar (i, j) definiert ist durch:

$$k_{ij} = \frac{L_{ij}}{\sqrt{L_{ii} \cdot L_{jj}}} \quad (2.73)$$

2.6 Äquivalente Parallele Kapazitäten (EPC)

Die parasitären Kapazitäten von 3D-Strukturen lassen sich bei den betrachteten Extraktionsverfahren in 2 Kategorien einteilen [12]:

- Elektrostatische Kapazitäten: Hierbei wird die Kapazität zwischen zwei räumlich getrennten leitfähigen Körpern bestimmt.
- Äquivalente Parallele Kapazitäten (engl. Equivalent Parallel Capacitances, EPCs): Einer leitfähigen 3D-Struktur, wie z.B. einer der Spulen der Drossel aus Kapitel 5, kann eine äquivalente Kapazität zugeordnet werden.

Die Extraktion der elektrostatischen Kapazitäten ist in Unterabschnitt 2.2 beschrieben.

Im Folgenden soll kurz der in [3], [4], [5], [6], [7], [8] enthaltene Teil der Extraktion der sog. EPC-Kapazitäten zusammengefasst werden.

Bei diesem Verfahren werden die Eigenmoden der diskreten Formulierung verwendet, um die parallelen äquivalenten Kapazitäten zu extrahieren. Zu diesem Zweck kann das Gleichungssystem (2.58) zu dem folgenden verallgemeinerten Eigenwertsystem umgeformt [8] werden:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \nabla \cdot \varepsilon \nabla & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{S}} \underbrace{\begin{bmatrix} s^2 \varphi \\ \mathbf{E} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\Phi}} = \lambda \underbrace{\begin{bmatrix} -\varepsilon^2 \mu & \varepsilon \nabla \cdot \\ \varepsilon \nabla & -\nabla \times \mu^{-1} \nabla \times \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}} \underbrace{\begin{bmatrix} s^2 \varphi \\ \mathbf{E} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\Phi}} , \quad (2.74)$$

mit $\lambda = s^2$, dem Eigenwert. Die hieraus berechneten Eigenmoden werden den Eigenmoden des Ersatzschaltbildes gleichgesetzt. Um das Eigenwertsystem auf Ersatzschaltbildebene aufstellen zu können, werden zunächst die Kirchhoff'schen Regeln und der Zusammenhang zwischen Spannung und dem Potential im Netzwerk benötigt:

$$\mathbf{A}\mathbf{I} = \mathbf{0} \qquad \mathbf{U} = \mathbf{A}^T \boldsymbol{\phi} , \quad (2.75)$$

mit \mathbf{A} der Inzidenzmatrix, $\boldsymbol{\phi}$ dem Potentialvektor, \mathbf{I} dem Strom und der Spannung \mathbf{U} . Mit diesen kann der durch eine Induktivität \mathbf{L} und Kapazität \mathbf{C} fließende Strom wie folgt dargestellt werden:

$$\mathbf{I}_C = s\mathbf{C}\mathbf{U}_c = s\mathbf{C}\mathbf{A}_C^T \boldsymbol{\phi} \quad (2.76)$$

$$\mathbf{I}_L = s^{-1}\mathbf{L}^{-1}\mathbf{U}_L = s^{-1}\mathbf{L}^{-1}\mathbf{A}_L^T \boldsymbol{\phi} \quad (2.77)$$

Desweiteren gilt für ein aus Induktivitäten und Kapazitäten bestehendes Ersatzschaltbild:

$$(s\mathbf{A}_C\mathbf{C}\mathbf{A}_C^T + s^{-1}\mathbf{A}_L\mathbf{L}^{-1}\mathbf{A}_L^T) \boldsymbol{\phi} = \mathbf{A}_s\mathbf{I}_s \quad (2.78)$$

Durch die Definition der folgenden Abkürzungen,

$$\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{A}_C\mathbf{C}\mathbf{A}_C^T \quad (2.79)$$

$$\tilde{\mathbf{L}} = \mathbf{A}_L\mathbf{L}^{-1}\mathbf{A}_L^T \quad (2.80)$$

$$(2.81)$$

kann der homogene Teil von Gl. (2.78) als Eigenwertsystem beschrieben werden durch [7], [8]:

$$\tilde{\mathbf{L}}\boldsymbol{\phi} = -s^2\tilde{\mathbf{C}}\boldsymbol{\phi} \quad (2.82)$$

Insofern für ein Ersatzschaltbildsystem mit N Knoten, $N - 1$ Eigenmoden aus Gl. (2.74) berechnet werden können, ist es möglich, die Kapazitätsmatrix \mathbf{C} aus Gl. (2.79) zu berechnen [7]. Ein modifiziertes Verfahren zur Bestimmung der Kapazitäten bei zu wenigen Eigenmoden kann in [7], [8] gefunden werden.

In Unterabschnitt 2.5 wurde die Admittanz mit einem L - C -Glied approximiert und daraus die Induktivitäten extrahiert. Mit diesem Vorgang lassen sich somit auch Kapazitäten extrahieren, die den EPCs entsprechen, wie in dem Beispiel in Unterabschnitt 4.4 noch gezeigt wird. Um das System korrekt abbilden zu können, müssen diese Kapazitäten für jedes Knotenpaar ermittelt werden, wodurch der Rechenaufwand steigt und dieser Ansatz nur für Gitter mit einer geringen Anzahl von Freiheitsgraden praktikabel ist.

3 Sensitivitäten extrahierter Netzwerkelemente

Mit den Methoden aus Abschnitt 2 ist es möglich, ein äquivalentes Ersatzschaltbild aus 3D-Feldmodellen zu extrahieren.

Für das beschriebene Extraktionsverfahren wird in diesem Kapitel, basierend auf [12] [14] [15] [13], eine Sensitivitätsanalyse auf mehreren Ebenen etabliert, welche dem in Abb. 7 dargestellten Ablauf genügt. Diese gliedert sich dabei in folgende Analysen:

- Geometrische Sensitivitätsanalyse:

Die geometrischen Sensitivitäten werden mit dem adjungierten Verfahren berechnet und geben an, wie sich Ersatzschaltbildparameter ändern, wenn Änderungen von Geometrieparametern durchgeführt werden. Bei jeder dieser Geometrieänderungen werden dabei die Sensitivitäten aller extrahierten Ersatzschaltbildelemente berechnet. Da das adjungierte Verfahren sehr effizient ist, können eine große Anzahl von Sensitivitäten berechnet und somit Sensitivitätskarten bestimmt werden.

- Sensitivitätsanalyse auf Netzwerkebene

Für das extrahierte äquivalente Ersatzschaltbild kann mit einer Sensitivitätsanalyse auf Netzwerkebene sowohl eine quantitative als auch qualitative Aussage über den Einfluss der einzelnen Ersatzschaltbildelemente getroffen werden. Sind die sensitiven Ersatzschaltbildelemente identifiziert, so können die (geometrischen) Sensitivitätskarten dieser Elemente Aufschluss über sensitive Geometriebereiche liefern.

- Sensitivitätsanalyse der QoIs

Die Kombination aus Netzwerksensitivitäten und geometrischen Sensitivitäten führt zu den Sensitivitäten der sog. „Quantities of Interest“ (QoIs), welche es erlauben, eine Änderung der Geometrieparameter direkt auf diese Größen abzubilden. Die Sensitivitätskarten liefern dabei einen qualitativen Beitrag und können genutzt werden, um das 3D Modell anzupassen. Die Werte der Sensitivitäten der QoIs können direkt zur Optimierung verwendet werden.

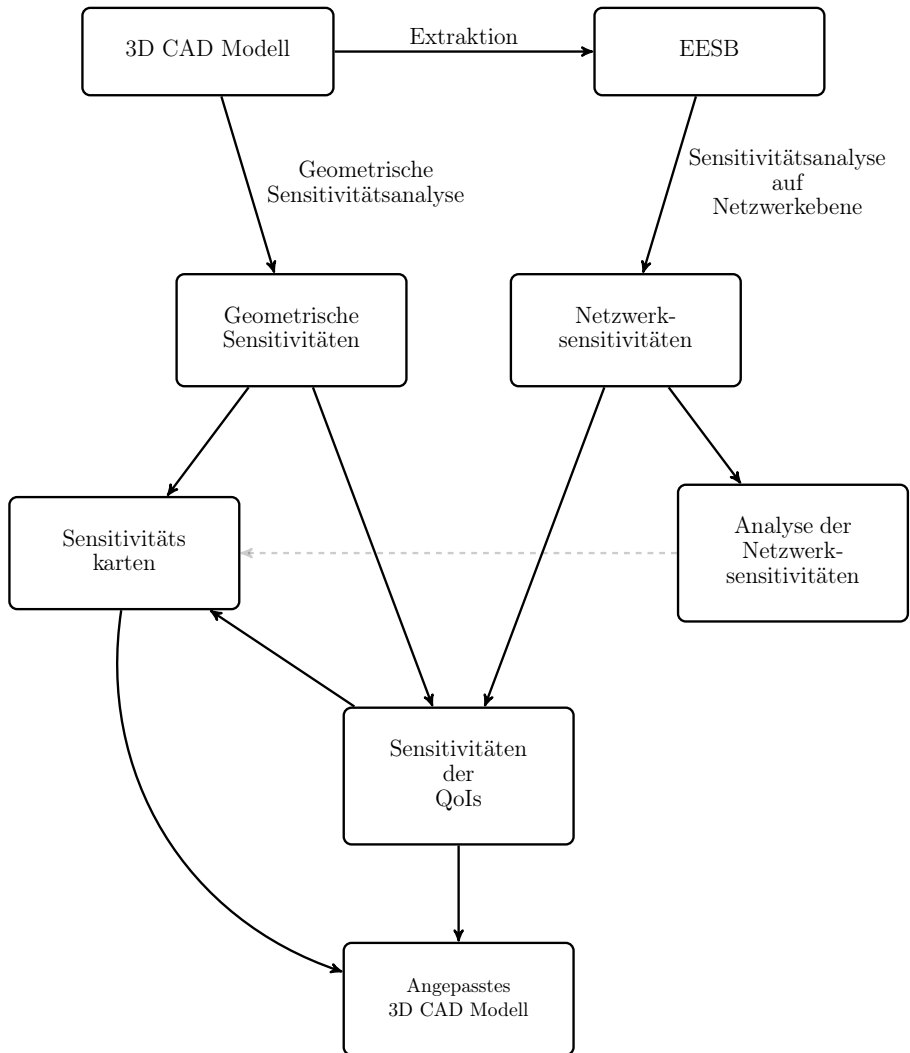


Abbildung 7: Schematische Darstellung des Ablaufes der Sensitivitätsanalyse.

3.1 Geometrische Sensitivitätsanalyse

Die extrahierten parasitären Ohm'schen DC-Widerstände R , Induktivitäten L , Kapazitäten C und Koppelfaktoren k sind Eigenschaften der Geometrie und der Materialien und somit abhängig von n Geometrie- und Materialparametern p_i , mit $i = 1, \dots, n$. Somit ist es nicht verwunderlich, dass eine Änderung der 3D-Struktur eine Änderung dieser Ersatzschaltbildelemente bewirkt. Die Änderungen der Ersatzschaltbildelemente bzgl. einer geometrischen Veränderung p_i werden im Folgenden als geometrische Sensitivitäten bezeichnet. Die effiziente Berechnung dieser geometrischen Sensitivitäten steht hier im Fokus.

3.1.1 Finite Differenzen

Die Methode der finiten Differenzen ist der einfachste Ansatz um die geometrischen Sensitivitäten zu berechnen. Dabei wird der Differenzenquotient aus den extrahierten Netzwerkelementen nach der geometrischen Veränderung um den skalaren Geometrieparameter Δp_i und vor der geometrischen Veränderung gebildet:

$$\frac{dR}{dp_i} \approx \frac{\Delta R}{\Delta p_i} = \frac{R_{p_i+\Delta p_i} - R_{p_i}}{\Delta p_i} \quad \frac{dL}{dp_i} \approx \frac{\Delta L}{\Delta p_i} = \frac{L_{p_i+\Delta p_i} - L_{p_i}}{\Delta p_i} \quad (3.1)$$

$$\frac{dC}{dp_i} \approx \frac{\Delta C}{\Delta p_i} = \frac{C_{p_i+\Delta p_i} - C_{p_i}}{\Delta p_i} \quad \frac{dk}{dp_i} \approx \frac{\Delta k}{\Delta p_i} = \frac{k_{p_i+\Delta p_i} - k_{p_i}}{\Delta p_i} \quad (3.2)$$

Auch wenn dieser Ansatz leicht zu implementieren ist, ergeben sich die in [29] beschriebenen Probleme. Bei der Wahl einer zu kleinen Variation Δp_i ergeben sich Rundungsfehler und zusätzlich kann die Differenz $\Delta Q = Q_{p_{i+1}} - Q_{p_i}$ die Genauigkeit des beschriebenen Extraktionsverfahrens unterschreiten. Bei der Wahl einer zu großen Variation dürfen Teile höherer Ordnung der Taylorentwicklung nicht länger vernachlässigt werden [29]. Selbst wenn durch eine Konvergenzanalyse eine geeignete Schrittweite gefunden werden kann, ist dieser Ansatz nur für wenige Geometrieparametervariationen geeignet, da der Rechenaufwand für eine große Anzahl von Parameter zu groß wird [29].

3.1.2 Direkte Berechnung und Adjungiertes Verfahren

Abgesehen von der Extraktion der EPCs über die Eigenmoden wird bei allen betrachteten Extraktionsverfahren aus Abschnitt 2 zunächst die Feldlösung aus einem Gleichungssystem der Form

$$\mathcal{A}(\mathbf{p})\mathbf{x}(\mathbf{p}) = \mathbf{b}(\mathbf{p}) \quad , \quad (3.3)$$

berechnet. Hier ist \mathcal{A} eine dünn besetzte Matrix, \mathbf{x} der Lösungsvektor, $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_i, \dots, p_N)$ der Vektor, der die Geometrieparameter enthält und \mathbf{b} der Term, welcher Randbedingungen und/oder Anregungen enthalten kann. Mit der Feldlösung wurde die Energie, die Leistung oder die Impedanz mit der

$$\text{Zustandsfunktion: } O(\mathbf{p}) = f(\mathbf{x}) \quad (3.4)$$

berechnet. Diese Größen finden eine Entsprechung auf der Ersatzschaltbildebene und bieten somit die Möglichkeit, Ersatzschaltbildelemente wie den Widerstand R , die Induktivität L und die Kapazität C zu extrahieren. Diese Gruppe von Ersatzschaltbildelementen wird im Folgenden mit dem Buchstaben O bezeichnet. Die Differentiation dieser Gruppe von Elementen nach der i -ten Geometrievariation p_i gehorcht der Kettenregel:

$$\frac{dO}{dp_i} = \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dp_i} \quad (3.5)$$

Da die Zustandsfunktion in den betrachteten Problemstellungen bekannt ist, kann der erste Faktor der rechten Seite $\partial f / \partial \mathbf{x}$ direkt bestimmt werden. Um den zweiten Teil, die Änderung des Lösungsvektors \mathbf{x} nach dem Variationsparameter p_i zu bestimmen, kann das lineare Gleichungssystem (3.3) differenziert und umgeformt werden:

$$\mathcal{A} \frac{d\mathbf{x}}{dp_i} = \left(\frac{d\mathbf{b}}{dp_i} - \frac{d\mathcal{A}}{dp_i} \mathbf{x} \right) \quad (3.6)$$

Somit müsste für jede geometrische Verschiebung ein zusätzliches Gleichungssystem in der Größenordnung des ursprünglichen Gleichungssystems aus

Gl. (3.3) gelöst werden.

Ein formales Einsetzen von $\mathbf{dx}/\mathbf{dp}_i$ in Gleichung (3.5) ergibt:

$$\frac{dO}{dp_i} = \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \cdot \left[\mathcal{A}^{-1} \left(\frac{d\mathbf{b}}{dp_i} - \frac{d\mathcal{A}}{dp_i} \mathbf{x} \right) \right] \quad (3.7)$$

Der weitaus höchste Rechenaufwand bildet die Lösung eines Gleichungssystems, hier dargestellt durch \mathcal{A}^{-1} . Im Verfahren (3.7) ist die Anzahl der benötigten Lösungen gleich $n_o n_p$, wobei n_o die Anzahl von QoIs und n_p die Anzahl von Parametern beschreibt. Das Verfahren wird also sehr teuer, wenn viele Parameter p_i betrachtet werden.

Um dieses Problem zu umgehen, wird das sogenannte adjungierte Verfahren [30] verwendet, welches eine deutlich effizientere Berechnungsmethode darstellt. Hierzu wird die sogenannte adjungierte Lösung, $\boldsymbol{\lambda}$ definiert:

$$\mathcal{A}^T \boldsymbol{\lambda} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \quad (3.8)$$

Wird dieser Ansatz in Gleichung (3.7) eingesetzt, ergibt sich:

$$\frac{dO}{dp_i} = \boldsymbol{\lambda}^T \left[\frac{d\mathbf{b}}{dp_i} - \frac{d\mathcal{A}}{dp_i} \mathbf{x} \right]. \quad (3.9)$$

Statt $n_o n_p$ Lösungen nach \mathcal{A}^{-1} müssen jetzt nur noch n_o Lösungen nach \mathcal{A}^{-T} vorgenommen werden. Die Matrix $d\mathcal{A}/dp_i$ und der Vektor $d\mathbf{b}/dp_i$ müssen zwar für jede Parameteränderung berechnet werden, jedoch sind diese sehr dünn besetzt und können daher sehr effizient assembliert werden. Die adjungierte Lösung $\boldsymbol{\lambda}$ muss nur einmal pro QoI berechnet werden und steht für jede weitere Änderung des Geometrieparameters p_i zur Verfügung.

Aus diesen Gründen ist diese Methode eine schnelle und effiziente Möglichkeit, die Sensitivität bezüglich einer sehr großen Anzahl von 3D Modellparametern zu ermitteln.

3.1.3 Sensitivität statischer Kapazitäten

Durch Gleichsetzen der im 3D Volumen gespeicherten elektrostatischen Energie W_{3D} aus Gl. (2.31) mit der in einem Kondensator gespeicherten Energie W_{ESB} aus Gl. (2.32) wurde in Abschnitt 2.2 die Extraktion einer äquivalenten Kapazität C erreicht:

$$W_{ESB} = \frac{1}{2} C U_C^2 = \underbrace{\frac{1}{2} \mathbf{c}^T \mathcal{L}^\varepsilon \mathbf{c}}_f = \frac{1}{2} \sum_j \sum_i c_i \mathcal{L}_{ij} c_j = W_{3D} \quad ; \quad (3.10)$$

wobei U_C die am Kondensator abfallende Spannung und \mathcal{L} den diskretisierten Laplace Operator beschreibt. Das diskrete Potential \mathbf{c} wird mit der, durch die Anwendung der FE Methode entstehenden, Repräsentation des Gauß'schen Satzes berechnet (siehe Abschnit 2.2):

$$\mathbf{b} = \mathcal{L}^\varepsilon \mathbf{c} \quad ; \quad (3.11)$$

wobei $\mathbf{b} = [0, \mathbf{b}_d]^T$ den Randwertterm aus Gleichung (2.29) beschreibt.

Bei konstanter Spannung U_C ergibt sich durch Differentiation der kapazitiven Energie im ESB aus Gl. (3.10) nach dem Geometrieparameter p_i die folgende Relation:

$$\frac{W_{ESB}}{dp_i} = \frac{1}{2} \frac{dC}{dp_i} U_C^2 \quad . \quad (3.12)$$

Bei bekannter Spannung U_C muss somit die Sensitivität der elektrischen Energie W_{ESB}/dp_i bestimmt werden, um die Sensitivität der Kapazität (dC/dp_i) zu erhalten. ⁴ Analog zur Extraktion der Kapazitäten wird die Änderung der Energie im Ersatzschaltbild mit der Änderung der Energie im 3D Model gleich-

⁴ Bezogen auf 3.1.2 ist in diesem Fall O und f durch eine skalare Größe $2U_C^{-2}$ verknüpft.

gesetzt. Die Differentiation der elektrischen Feldenergie W_{3D} aus Gl. (3.10) nach dem Parameter p_i ergibt sich zu:

$$\frac{dW_{3D}}{dp_i} = \frac{1}{2} \mathbf{c}^T \frac{d\mathcal{L}^\varepsilon}{dp_i} \mathbf{c} + \underbrace{\left(\frac{\partial W_{3D}}{\partial \mathbf{c}} \right)^T}_{df/dc} \cdot \frac{d\mathbf{c}}{dp_i} \quad ; \quad (3.13)$$

mit den beiden Vektoren $(\partial W_{3D}/\partial \mathbf{c})^T = (\partial W_{3D}/\partial c_1, \dots, \partial W_{3D}/\partial c_N)$ und $(d\mathbf{c}/dp_i)^T = (dc_1/dp_i, \dots, dc_N/dp_i)$. Da das diskrete Potential \mathbf{c} bekannt ist und auch der geänderte Operator $d\mathcal{L}/dp_i$ assembliert werden kann, kann der erste Term der Gleichung direkt ausgewertet werden. Der zweite Term kann nicht direkt berechnet und soll mit dem adjungierten Verfahren aus Abschnitt 3 berechnet werden. Einsetzen der Größen in Gl. (3.9) führt zu:

$$\left. \frac{dW_{3D}}{dp_i} \right|_{\mathcal{L}^\varepsilon = \text{const}} = \boldsymbol{\lambda}^T \left[-\frac{d\mathcal{L}^\varepsilon}{dp_i} \mathbf{c} + \frac{d\mathbf{b}}{dp_i} \right] \quad (3.14)$$

Die adjungierte Lösung $\boldsymbol{\lambda}$ ist durch die Differentiation der Zustandsfunktion aus Gl. (3.10) bzgl. des Potentials \mathbf{c} definiert:

$$\mathcal{L}^{\varepsilon T} \boldsymbol{\lambda} = \frac{\partial W_{3D}}{\partial \mathbf{c}} = \mathcal{L}^\varepsilon \mathbf{c} \quad (3.15)$$

Aufgrund der Symmetrie des Operators \mathcal{L}^ε ergibt sich $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{c}$ und kann in Gl. (3.14) eingesetzt werden:

$$\left. \frac{dW_{3D}}{dp_i} \right|_{\mathcal{L}^\varepsilon = \text{const}} = -\mathbf{c}^T \frac{d\mathcal{L}^\varepsilon}{dp_i} \mathbf{c} + \mathbf{c}^T \frac{d\mathbf{b}}{dp_i} \quad (3.16)$$

Wie oben schon erwähnt, ist der erste Term berechenbar und somit muss wiederum nur der zweite Term bestimmt werden. Durch Differentiation der Ausgangsgleichung (3.11) und der linksseitigen Multiplikation von \mathbf{c}^T ergibt sich:

$$\mathbf{c}^T \frac{d\mathbf{b}}{dp_i} = \mathbf{c}^T \frac{d\mathcal{L}^\varepsilon}{dp_i} \mathbf{c} + \underbrace{\mathbf{c}^T \mathcal{L}^\varepsilon \frac{d\mathbf{c}}{dp_i}}_{\text{i)}} \stackrel{\text{z.Z.}}{=} \mathbf{c}^T \frac{d\mathcal{L}^\varepsilon}{dp_i} \mathbf{c} \quad (3.17)$$

Mit der in Gl. (2.29) gewählten Aufspaltung des Gleichungssystems in unbekannte Freiheitsgrade und Dirichlet Freiheitsgrade kann gezeigt werden, dass der Term i) keinen Beitrag zur Sensitivität leistet:

$$\mathbf{c}^T \mathcal{L}^\varepsilon \frac{d\mathbf{c}}{dp_i} = [\mathbf{c}_u \quad \mathbf{c}_d] \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{uu}^\varepsilon & \mathcal{L}_{ud}^\varepsilon \\ \mathcal{L}_{du}^\varepsilon & \mathcal{L}_{dd}^\varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d\mathbf{c}_u}{dp_i} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \underbrace{(\mathcal{L}_{uu}^\varepsilon \mathbf{c}_u + \mathcal{L}_{ud}^\varepsilon \mathbf{c}_d)}_{=0}^T \frac{d\mathbf{c}_u}{dp_i} \quad . \quad (3.18)$$

In weiterer Folge zeigt sich durch Rückeinsetzen, dass dadurch auch Gl. (3.14) keinen Beitrag leistet und die Sensitivität der Energie angegeben werden kann mit:

$$\frac{dW_{3D}}{dp_i} = \frac{1}{2} \mathbf{c}^T \frac{d\mathcal{L}^\varepsilon}{dp} \mathbf{c} \quad . \quad (3.19)$$

Wie an dem Ergebnis aus Gl. (3.19) zu sehen ist, wird die adjungierte Methode in diesem speziellen Fall nicht benötigt. Die Lösung kann auch direkt berechnet werden. Die totale formale Differentiation der Energie W_{3D} ergibt:

$$\frac{dW_{3D}}{dp_i} = \frac{1}{2} \underbrace{\mathbf{c}^T \mathcal{L}^\varepsilon \frac{d\mathbf{c}}{dp_i}}_{\text{i)}} + \frac{1}{2} \underbrace{\frac{d\mathbf{c}^T}{dp_i} \mathcal{L}^\varepsilon \mathbf{c}}_{\text{ii)}} + \frac{1}{2} \underbrace{\mathbf{c}^T \frac{d\mathcal{L}^\varepsilon}{dp_i} \mathbf{c}}_{\text{iii)}} \quad (3.20)$$

Es wurde schon gezeigt, dass der Term i) keinen Beitrag leistet. Ebenso ergibt eine ähnliche Betrachtungsweise, dass Term ii) auch keinen Beitrag zur Sensitivität leistet:

$$\frac{d\mathbf{c}^T}{dp_i} \mathcal{L}^\varepsilon \mathbf{c} = \begin{bmatrix} \frac{d\mathbf{c}_u}{dp} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{uu}^\varepsilon & \mathcal{L}_{ud}^\varepsilon \\ \mathcal{L}_{du}^\varepsilon & \mathcal{L}_{dd}^\varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}_u \\ \mathbf{c}_d \end{bmatrix} = \frac{d\mathbf{c}_u}{dp_i} \underbrace{(\mathcal{L}_{uu}^\varepsilon \mathbf{c}_u + \mathcal{L}_{ud}^\varepsilon \mathbf{c}_d)}_{=0} \quad (3.21)$$

Und somit ergibt sich das gleiche Ergebnis wie in Gleichung (3.19):

$$\frac{dW_{3D}}{dp_i} = \frac{1}{2} \mathbf{c}^T \frac{d\mathcal{L}^\varepsilon}{dp_i} \mathbf{c} \quad (3.22)$$

Abschließend kann aus dieser und aus Gl. (3.12) die Sensitivität der Kapazität bzgl. des Parameters p_i angegeben werden:

$$\frac{dC}{dp_i} = U_C^{-2} \mathbf{c}^T \frac{d\mathcal{L}^\varepsilon}{dp_i} \mathbf{c} \quad . \quad (3.23)$$

3.1.4 Sensitivität von DC Leitwerten

Wie schon in Abschnitt 2.3 erwähnt wurde, führt die Extraktion der statischen Kapazitäten und die Extraktion der DC-Leitwerte auf eine identische mathematische Struktur. Die Berechnung der Sensitivitäten der DC-Leitwerte kann durch eine, dem vorherigen Unterabschnitt analoge Betrachtungsweise, gewonnen werden, weshalb der Berechnungsweg nur skizziert wird.

In Abschnitt 2.3 wurde durch Gleichsetzen der Verlustleistung P_{3D} des 3D-Models aus Gl. (2.42) und der am Leitwert abfallenden Leistung (2.43) die Extraktion eines äquivalenten Leitwertes G bzw. eines Widerstandes R erreicht:

$$P_{ESB} = GU_G^2 = \mathbf{c}^T \mathcal{L}^\sigma \mathbf{c} = P_{3D} \quad . \quad (3.24)$$

Die Sensitivität der Leistung des Ersatzschaltbildes ergibt sich nach obiger Gleichung bei konstanter Spannung U_G zu:

$$\frac{dP_{ESB}}{dp_i} = \frac{dG}{dp_i} U_G^2 \quad . \quad (3.25)$$

Die Änderung der Leistung im Ersatzschaltbild P_{ESB} wird wieder mit der Änderung der Leistung P_{3D} im 3D-Modell gleichgesetzt und eine zum letzten Unterabschnitt analoge Ableitung liefert die Sensitivität der Leistung im 3D Modell:

$$\frac{dP_{3D}}{dp_i} = \mathbf{c}^T \frac{d\mathcal{L}}{dp_i} \mathbf{c} \quad (3.26)$$

Aus dieser Gleichung und Gl. (3.25) ist die Sensitivität für die Leitfähigkeit G bzgl. einer Geometrieänderung p_i gegeben durch:

$$\frac{dG}{dp_i} = U_G^{-2} \mathbf{c}^T \frac{d\mathcal{L}}{dp_i} \mathbf{c} \quad . \quad (3.27)$$

Da der Widerstand und der Leitwert über die Inversion miteinander verknüpft sind, kann für die Sensitivität des Widerstandes R folgender Ausdruck angegeben werden:

$$\frac{dR}{dp_i} = -\frac{1}{G^2} \frac{dG}{dp_i} \quad (3.28)$$

3.1.5 Sensitivität von partiellen Induktivitäten

Zunächst müssen die Beziehungen zwischen der Impedanzmatrix \mathbf{Z} und der Admittanzmatrix \mathbf{Y} und deren Ableitung bestimmt werden, da es im Folgenden von den betrachteten Gleichungen abhängt, welche Darstellung vorteilhafter für die Berechnung ist:

- Die Beziehung zwischen der Impedanz \mathbf{Z} und der Admittanz \mathbf{Y} ist gegeben durch:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Y}^{-1} \qquad \mathbf{Y} = \mathbf{Z}^{-1} \quad . \quad (3.29)$$

- Mit der Vorschrift inverse Matrizen zu differenzieren [31], ergeben sich für deren Ableitung folgende Zusammenhänge:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{Z}}{dp_i} &= \frac{d\mathbf{Y}^{-1}}{dp_i} = \mathbf{Y}^{-1} \frac{d\mathbf{Y}}{dp_i} \mathbf{Y}^{-1} = \mathbf{Z} \frac{d\mathbf{Y}}{dp_i} \mathbf{Z} \\ \frac{d\mathbf{Y}}{dp_i} &= \frac{d\mathbf{Z}^{-1}}{dp_i} = \mathbf{Z}^{-1} \frac{d\mathbf{Z}}{dp_i} \mathbf{Z}^{-1} = \mathbf{Y} \frac{d\mathbf{Z}}{dp_i} \mathbf{Y} \end{aligned} \quad (3.30)$$

Durch die Annäherung der Impedanzen der 3D-Strukturen aus Gl. (2.67) mit den Impedanzen eines Systems aus LC-Elementen aus Gl. (2.68) konnte in Unterabschnitt 2.5 die Extraktion von äquivalenten Induktivitäten \mathbf{L} durchgeführt werden:

$$\mathbf{Z}_{3D}(s) = ((s\tilde{\mathbf{L}})^{-1} + s\tilde{\mathbf{C}})^{-1} = \mathbf{Z}_{\text{ESB}}(s) \quad ; \quad (3.31)$$

mit $s = i\omega$. Die Differentiation der Admittanzmatrix \mathbf{Y}_{ESB} nach dem Geometrieparameter p_i ergibt bei einer vorgegebenen Frequenz ω :

$$\frac{d\mathbf{Y}_{\text{ESB}}}{dp_i} = \frac{1}{i\omega} \cdot \frac{d}{dp_i} (\tilde{\mathbf{L}}^{-1}) + i\omega \frac{d\tilde{\mathbf{C}}}{dp_i} \quad (3.32)$$

Analog zu Unterabschnitt 2.5 wird diese Gleichung für mehrere Frequenzpunkte ausgewertet und die Sensitivität der Inversen \tilde{L}^{-1} mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate bestimmt. Die Inzidenzmatrix enthält die Topologie des Systems und ist von den betrachteten Änderungen des Geometrieparameters p_i unabhängig. Sofern die Pseudoinverse der Inzidenzmatrix existiert (siehe 2.4), kann die Änderung der inversen Induktivitätsmatrix für die gegebene Topologie berechnet werden⁵:

$$\frac{dL^{-1}}{dp_i} = A_L^+ \frac{d\tilde{L}^{-1}}{dp_i} (A_L^+)^T \quad (3.33)$$

Mit diesem Ergebnis und mit der Vorschrift inverse Matrizen zu differenzieren [31] berechnet sich die Sensitivität der Induktivität L bzgl. des Geometrieparameters p_i zu:

$$\frac{dL}{dp_i} = -L \frac{dL^{-1}}{dp_i} L \quad (3.34)$$

Die in Gl. (3.32) benötigte Änderung der Impedanz auf Ersatzschaltbildebene Z_{ESB} wird mit der Änderung der Impedanz Z_{3D} im 3D-Modell gleichgesetzt. Analog zu den vorherigen Abschnitten soll die Änderung einer einzelnen Impedanz eines Knotenpaares betrachtet werden. Dies entspricht der Berechnung eines einzelnen Eintrages der Impedanzmatrix. Die verallgemeinerte Formulierung findet sich in [14]. Die Sensitivität der Impedanz bzgl. einer Änderung des Geometrieparameters p_i eines Knotenpaares ist gegeben durch:

$$\frac{dZ_{3D}(s)}{dp_i} = \left(\frac{\partial Z_{3D}(s)}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \frac{d\mathbf{x}}{dp_i} ; \quad (3.35)$$

mit der Feldlösung \mathbf{x} aus Gl. (2.66). Die Sensitivität der Impedanz soll mit dem adjungierten Verfahren aus Unterabschnitt 3.1.2 berechnet werden und ergibt durch Einsetzen in Gl. (3.9) den folgenden Ausdruck:

$$\frac{dZ_{3D}(s)}{dp_i} = \lambda^T \left[\frac{dy}{dp_i} - \left(\frac{dS}{dp_i} + s^2 \frac{dT}{dp_i} \right) \mathbf{x} \right]. \quad (3.36)$$

⁵ Da es sich um differentielle Geometrieänderungen handelt, wird die Netzwerktopologie als unveränderlich angenommen.

Die Freiheitsgrade \mathbf{x} der Feldlösung ist von der Berechnung der Induktivität bekannt und die Operatoren $d\mathbf{S}/dp_i$ und $d\mathbf{T}/dp_i$ können effizient assembliert werden. Die sog. adjungierte Lösung $\boldsymbol{\lambda}$ kann durch Einsetzen in Gl. (3.8) aus folgendem Gleichungssystem ermittelt werden:

$$(\mathbf{S} + s^2\mathbf{T})^T \boldsymbol{\lambda} = \frac{\partial Z_{3D}(s)}{\partial \mathbf{x}} \quad (3.37)$$

Die dazu notwendige Änderung der Impedanz des 3D-Modells bzgl. der Änderung des Lösungsvektors kann aus Gl. (2.67) berechnet werden:

$$\frac{\partial Z_{3D}}{\partial \mathbf{x}} = s^{-2} I^{-1} \mathcal{P} \quad (3.38)$$

Zur Berechnung der Sensitivität des Anregungsterms wird zunächst der Anregungsterm \mathbf{y} aus Gl. (3.36) in der FE-Formulierung aufgeschrieben:

$$\mathbf{y} = s^3 \begin{bmatrix} \mathcal{S} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{g} \\ -\mathcal{G} \mu^{-1} \mathbf{g} \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

Mit der sog. „diskreten Massenmatrix“ \mathcal{S} und dem sog. „diskreten Gradientenoperator“ \mathcal{G} . Für elementweise konstante Materialien ergibt sich die Änderung des Anregungsterms bzgl. des Geometrieparameters p_i durch:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dp_i} = s^3 \begin{bmatrix} \frac{d\mathcal{S}}{dp_i} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{g} + \mathcal{S} \boldsymbol{\varepsilon} \frac{d\mathbf{g}}{dp_i} \\ -\frac{d\mathcal{G}}{dp_i} \mu^{-1} \mathbf{g} - \mathcal{G} \mu^{-1} \frac{d\mathbf{g}}{dp_i} \end{bmatrix} . \quad (3.40)$$

Die Operatoren $d\mathcal{S}/dp_i$ und $d\mathcal{G}/dp_i$ können effizient assembliert werden. Um die Änderung des Hilfsfeldes $d\mathbf{g}/dp_i$ berechnen zu können, wird zunächst ein Teil von Gl. (2.63) in der FE-Formulierung aufgeschrieben:

$$\mathcal{L}_{\mu^{-1}} \mathbf{g} = \nabla \cdot \mathbf{j}_s \quad ; \quad (3.41)$$

wobei $\mathcal{L}_{\mu^{-1}} = -\nabla \cdot (\mu^{-1} \nabla)$ dem Laplaceoperator entspricht. Das Differenzieren von Gleichung (3.41) nach dem Geometrieparameter p_i ergibt:

$$\mathcal{L}_{\mu^{-1}} \frac{dg}{dp_i} = - \underbrace{\frac{d\mathcal{L}_{\mu^{-1}}}{dp_i} g}_{\text{i)}} + \underbrace{\frac{d(\nabla \cdot \mathbf{j}_s)}{dp_i}}_{\text{ii)}} . \quad (3.42)$$

Zur Bestimmung des Hilfsfeldes g wurde ein konstanter Stromfluss ($\nabla \cdot \mathbf{j}_s$ aus Gl. (2.63)) knotenweise eingepreßt und daher ändert sich Term ii) nur wenn in die verschobenen Flächen auch ein Stromfluss eingepreßt wurde.

Neben dieser Beobachtung, haben numerische Experimente gezeigt, dass der Term dy/dp aus Gl. (3.36) nur einen Beitrag zur Sensitivität der Impedanz leistet, wenn in die verschobenen Flächen auch ein Stromfluss eingepreßt wurde.

3.1.6 Sensitivität der Koppelfaktoren

In Unterabschnitt 2.5 wurde der Koppelfaktor k_{ij} in Gl. (2.73) definiert:

$$k_{ij} = L_{ij} (|L_{ii}| \cdot |L_{jj}|)^{-\frac{1}{2}} \quad (3.43)$$

Da für Eigeninduktivitäten $L_{ii} > 0$ und $L_{jj} > 0$ gilt, ergibt sich die Sensitivität des Koppelfaktors bzgl. eines Geometrieparameters zu:

$$\frac{dk_{ij}}{dp_i} = \frac{dL_{ij}}{dp_i} (L_{ii} \cdot L_{jj})^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} L_{ij} (L_{ii} \cdot L_{jj})^{-\frac{3}{2}} \left[\frac{dL_{ii}}{dp_i} L_{jj} + L_{ii} \frac{dL_{jj}}{dp_i} \right] \quad (3.44)$$

3.1.7 Sensitivität der äquivalenten parallelen Kapazitäten

In Unterabschnitt 3.1.5 wurde die Sensitivität der Induktivität aus der folgenden Gleichung bestimmt:

$$\frac{d\mathbf{Y}_{\text{ESB}}}{dp_i} = \frac{1}{i\omega} \cdot \frac{d}{dp_i} (\tilde{\mathbf{L}}^{-1}) + i\omega \frac{d\tilde{\mathbf{C}}}{dp_i} \quad (3.45)$$

Hieraus lassen sich die Sensitivitäten der äquivalenten parallelen Kapazitäten berechnen:

$$\frac{d\mathbf{C}}{dp_i} = \mathbf{A}_L^+ \frac{d\tilde{\mathbf{C}}}{dp_i} (\mathbf{A}_L^+)^T \quad (3.46)$$

Wie schon in Unterkapitel 2.6 erwähnt wurde, müssen zur korrekten Beschreibung des Systems die Kapazitäten aller Knotenpaare ermittelt werden, wodurch der Rechenaufwand steigt. Dadurch ist dieser Ansatz nur für eine geringe Anzahl von Knoten und für kleinere Gitter praktikabel. In Beispiel 4.4 ist die Anwendung für ein einfaches Beispiel zu sehen.

3.2 Sensitivität der Ersatzschaltbildelemente

Eine Änderung der Netzwerkelemente (R, L, C, k) eines extrahierten Ersatzschaltbildes führt zu einer Änderung der Netzwerksimulationsgrößen Q (z. B. Spannung U , S_{21} -Parameter, etc.). Diese Größe wird im Weiteren als Netzwerksensitivität bezeichnet. Diese Netzwerksensitivitäten lassen sich durch eine finite Differenz annähern:

$$\frac{dQ}{dR_i} \approx \frac{\Delta Q}{\Delta R_i} = \frac{Q(R|_{R_i=R_i+\Delta R_i}, L, C, k) - Q(R, L, C, k)}{\Delta R_i} \quad (3.47)$$

$$\frac{dQ}{dR_i} \approx \frac{\Delta Q}{\Delta L_i} = \frac{Q(R, L|_{L_i=L_i+\Delta L_i}, C, k) - Q(R, L, C, k)}{\Delta L_i} \quad (3.48)$$

$$\frac{dQ}{dR_i} \approx \frac{\Delta Q}{\Delta C_i} = \frac{Q(R, L, C|_{C_i=C_i+\Delta C_i}, k) - Q(R, L, C, k)}{\Delta C_i} \quad (3.49)$$

$$\frac{dQ}{dR_i} \approx \frac{\Delta Q}{\Delta k_i} = \frac{Q(R, L, C, k|_{k_i=k_i+\Delta k_i}) - Q(R, L, C, k)}{\Delta k_i} \quad (3.50)$$

Somit müssen die extrahierten Ersatzschaltbildelemente einzeln um ΔR_i , ΔL_i , ΔC_i und Δk_i variiert und die geänderten QoIs bestimmt werden. Dies führt zwar zu einer großen Anzahl von durchzuführenden Netzwerksimulationen, jedoch kann diese Berechnung sehr effizient und parallelisiert durchgeführt werden. Auch hier ist es möglich ein adjungiertes Verfahren einzusetzen. Aufgrund der bedeutend kleineren Rechenzeiten bei der Bestimmung von Netzwerklösungen ist das jedoch nicht notwendig. Die in den Abschnitten 4 und 5 verwendeten Netzwerksensitivitäten wurden mittels einer Ansteuerung durch LT-Spice bestimmt.

Die Netzwerksensitivitäten dienen nicht nur zur Berechnung der im nächsten Unterabschnitt beschriebenen Sensitivitäten der QoIs, sondern können auch, wie Unterabschnitt 5.3 demonstriert, genutzt werden um eine qualitative und quantitative Aussage über die Stellschrauben des Systems zu machen.

3.3 Sensitivität von QoIs

Wird ein äquivalentes Ersatzschaltbild mit den beschriebenen Verfahren extrahiert, so kann dieses passive Netzwerk in einem Netzwerksimulator (z.B. LT-Spice) beschaltet und die Netzwerksimulationsgrößen wie z.B. S -Parameter, Strom I , Spannung U , etc. bestimmt werden. Diese Netzwerkgrößen sollen im Weiteren als „Quantities of Interest“ (QoI) bezeichnet werden.

Soll das Verhalten der QoIs eines elektronischen Gerätes wie. z.B. einem Filter verbessert werden, so sind die Sensitivitäten dieser QoIs bzgl. einer Änderung des Geometrieparameters p_i notwendig, um sensitive Bereiche zu identifizieren und gleichzeitig das elektronische Gerät zu optimieren.

Bevor die Berechnung dieser Sensitivitäten angegeben wird, soll zunächst ein Blick auf die bisherigen Sensitivitäten geworfen werden:

- Netzwerksensitivität:

Die QoIs werden durch die im extrahierten Netzwerk enthaltenen Elemente bestimmt. Eine Änderung dieser Elemente führt zu einer Änderung der QoIs. Diese Sensitivität ist die Netzwerksensitivität aus Unterabschnitt 3.2.

- Geometrische Sensitivitäten:

Die extrahierten Ersatzschaltbildelemente sind im Wesentlichen durch die Geometrie und durch die Materialeigenschaften bestimmt. Eine Änderung eines Geometrieparameters p_i führt somit zu einer Änderung der Netzwerkelemente (geometrische Sensitivitäten).

Die Kombination dieser Sensitivitäten führt zu der Sensitivität der QoIs bzgl. der Änderung eines Geometrieparameters p_i und lässt sich mit Hilfe der Kettenregel wie folgt ausdrücken:

$$\frac{dQ}{dp_i} = \sum_{m=1}^{N_R} \underbrace{\frac{\partial Q}{\partial R_m}}_{a)} \underbrace{\frac{dR_m}{dp_i}}_{b)} + \sum_{m=1}^{N_L} \underbrace{\frac{\partial Q}{\partial L_m}}_{a)} \underbrace{\frac{dL_m}{dp_i}}_{b)} + \sum_{m=1}^{N_C} \underbrace{\frac{\partial Q}{\partial C_m}}_{a)} \underbrace{\frac{dC_m}{dp_i}}_{b)} + \sum_{m=1}^{N_K} \underbrace{\frac{\partial Q}{\partial K_m}}_{a)} \underbrace{\frac{dK_m}{dp_i}}_{b)} \quad (3.51)$$

mit der Variablen Q für die QoIs und den Netzwerkelementen (R, L, C, k) und ihrer Anzahl N_R, N_L, N_C, N_K . Die Terme a) entsprechen den Netzwerksensitivitäten und die Terme b) den geometrischen Sensitivitäten.

Diese Sensitivitäten beschreiben also den frequenzabhängigen Zusammenhang zwischen einer Änderung eines Geometrieparameters und der betrachteten QoIs. Über die Sensitivitäten der QoIs können folgende Aussagen getroffen werden:

- Die benötigten Netzwerksensitivitäten können effizient berechnet werden:
 - ⇒ Dies ermöglicht die Berechnung einer größeren Anzahl von Sensitivitäten der QoIs zu gegebenen geometrischen Sensitivitäten.
 - ⇒ Dies ermöglicht die Berechnung der Sensitivitäten der QoIs zu gegebenen geometrischen Sensitivitäten für eine größere Anzahl von Frequenzpunkten.
- Für die QoIs sensitive geometrische Bereiche können identifiziert werden.
- Da die Berechnung über die Aufsummierung der Sensitivitäten der einzelnen Elemente erfolgt, geht bei der Kombination der Netzwerksensitivitäten mit den geometrischen Sensitivitäten keinesfalls die Interpretierbarkeit verloren.

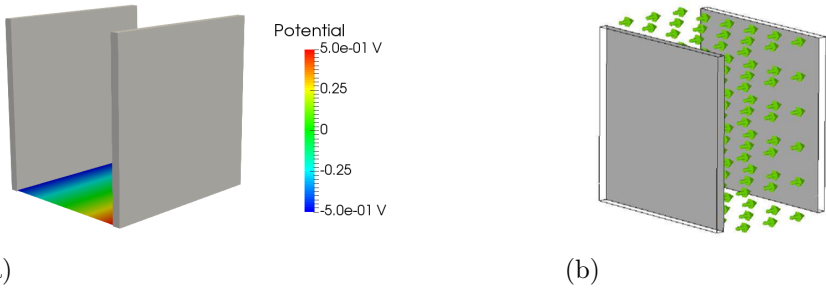


Abbildung 8: a) Schematische Darstellung des zur Validation verwendeten Plattenkondensators. Das auf der Schnittebene dargestellte Potential stellt sich ein, wenn auf einer der Platten -0.5V und auf der anderen 0.5V eingeprägt werden.
 b) Elektrisches Feld \mathbf{E} bei magnetischen Randbedingungen für den Plattenkondensator, dargestellt in grünen Vektorpfeilen.

4 Validation und Test

Die in Abschnitt 2 beschriebenen Extraktionsverfahren liefern ein äquivalentes Ersatzschaltbild zu einer 3D Geometrie, bestehend aus den Ohm'schen Widerständen R_i , den statischen Kapazitäten C_i , den Eigeninduktivitäten L_i und den dazugehörigen Koppelfaktoren k_{ij} . Eine geometrische Modifikation führt zu geänderten Werten dieser Ersatzschaltbildelemente, welche mit den in Abschnitt 3 beschriebenen Verfahren berechnet werden können. Diese Verfahren werden, falls vorhanden, an analytisch ableitbaren Ausdrücken getestet. Andernfalls werden diese Tests indirekt über die Systemgrößen des Ersatzschaltbildes durchgeführt.

4.1 Elektrostatische Kapazitäten

Betrachtet wird ein Plattenkondensator, welcher aus zwei planparallelen, identischen, im Abstand d positionierten Platten mit der Fläche A besteht. Eine Darstellung des verwendeten Plattenkondensators findet sich in Fig. 8a). Bei einem Plattenkondensator wird ein homogenes elektrisches Feld \mathbf{E} zwischen

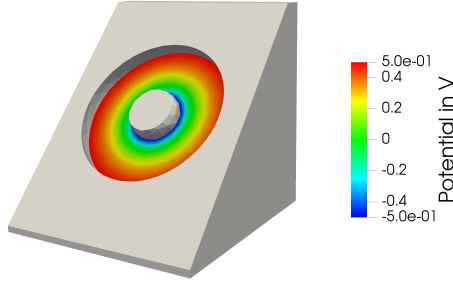


Abbildung 9: Darstellung des zur Validation umgesetzten Modells eines Kugelkondensators. Die äußere Kugelschale wurde modelliert, indem eine Kugel aus einem leitfähigen Block geschnitten wurde. Die innere Kugelschale wurde durch eine leitfähige Kugel im Ursprung modelliert. Zu sehen ist ein Schnitt durch das Modell mit dargestelltem radialsymmetrischen Potentialverlauf.

den Platten vorausgesetzt [32], was z.B. durch die Annahme unendlich ausgehnter Platten erreicht wird. Bei einer endlichen Ausdehnung stellt sich jedoch an den Plattenenden ein inhomogenes Feld ein. Um diese Randeffekte in der Simulation zu eliminieren, wurde das Simulationsvolumen auf die Abmaße der Platten gezogen. Dadurch ergeben sich im betrachteten Simulationsvolumen nur homogene, zur Plattenfläche senkrechte \mathbf{E} -Felder (Abb. 8b). Dies ist auch an der berechneten homogenen Potentialverteilung in Fig. 8a) zu sehen. Die Kapazität eines Plattenkondensators kann mit der analytischen Formel

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{A}{d} \quad , \quad (4.1)$$

berechnet werden [32], [33]. Daraus ergibt sich durch Differentiation die Sensitivität bzgl. des Abstandes d :

$$\frac{dC}{dd} = -\varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{A}{d^2} \quad ; \quad (4.2)$$

woraus sich eine, mit wachsendem Abstand abnehmende Kapazität ergibt. Zusätzlich soll ein Kugelkondensator [22] bestehend aus einer Kugelschale mit

dem Außenradius r_2 und einer in der Kugelschale befindlichen zentrierten Kugel mit einem Innenradius r_1 betrachtet werden (Abb. 9). In [33] findet sich ein Ausdruck, mit welchem die Kapazität des Modells berechnet werden kann:

$$C = 4\pi\epsilon_0\epsilon_r \frac{r_1 \cdot r_2}{r_2 - r_1} \quad . \quad (4.3)$$

Die Sensitivität der Kapazität bzgl. des Innenradiuses r_1 und des Außenradiuses r_2 ergibt sich durch Differentiation von (4.3) zu:

$$\frac{dC}{dr_1} = 4\pi\epsilon_0\epsilon_r \frac{r_2^2}{(r_2 - r_1)^2} \quad . \quad (4.4)$$

$$\frac{dC}{dr_2} = -4\pi\epsilon_0\epsilon_r \frac{r_1^2}{(r_2 - r_1)^2} \quad . \quad (4.5)$$

Mit steigendem Innenradius r_1 erhöht sich, und mit steigendem Außenradius r_2 verringert sich die Kapazität.

Teile der dargestellten Ausdrücke für die Kapazität und deren Sensitivitäten des Platten- und Kugelkondensators sollen validiert werden.

Der betrachtete Plattenkondensator (Fig. 8a) hat eine quadratische Fläche von $A = 100\text{cm}^2$ und ein, im Zwischenraum der Platten befindliches, Dielektrikum von $\epsilon_r = 1000$. Bei verschiedenen Abständen d im Bereich von $[3.0\text{cm}, \dots, 6.0\text{cm}]$ wurden die Werte der Kapazität und der Sensitivität dC/dd ermittelt und mit den analytischen Lösungen aus (4.1) und (4.2) verglichen. Diese Vergleichsrechnungen sind in Abbildung 11 dargestellt. Wie zu sehen ist, liegen die Abweichungen der Kapazität C im Bereich der numerischen Genauigkeit (double precision). Zum einen gibt es keinen Diskretisierungsfehler durch gekrümmte Oberflächen und zum anderen sind die elektrischen Felder \mathbf{E} senkrecht zu den Platten orientiert (Abb. 8b), was dem in Gl. (4.1) angenommen (idealisierten) Plattenkondensator entspricht. Die im Vergleich dazu größeren Abweichungen der Sensitivität, die unterhalb von ca. $6 \cdot 10^{-7} \text{nF/cm}$ liegen, sind auf den durch finite Differenzen angenäherten FE-Operator $d\mathcal{L}/dd$ zurückzuführen.

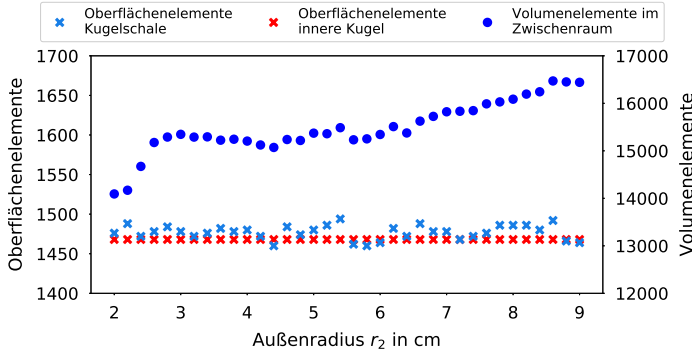
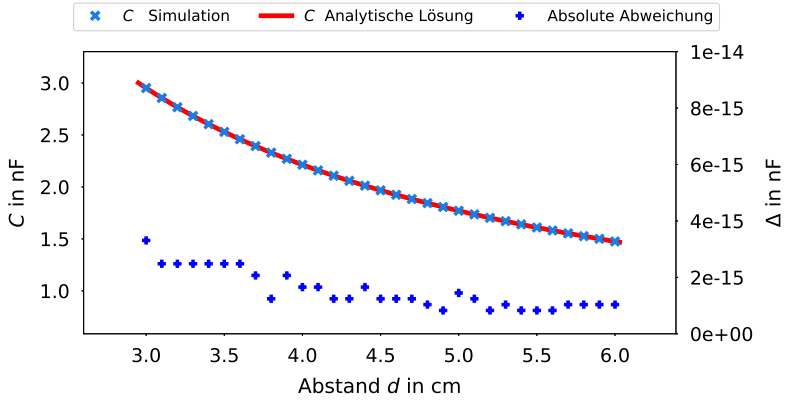


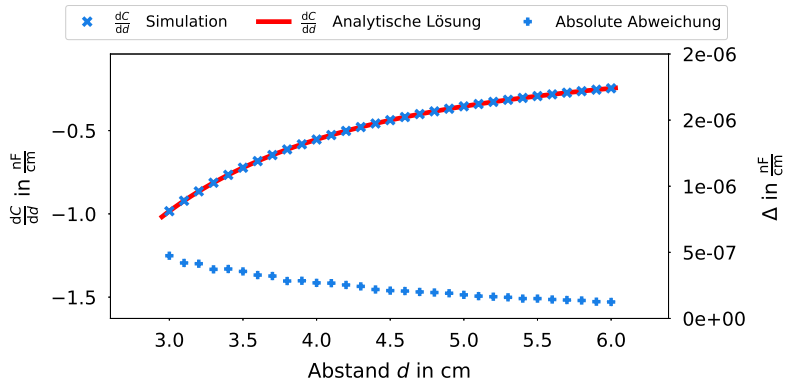
Abbildung 10: Darstellung der Oberflächenelemente der inneren Kugel und der inneren Oberfläche der Kugelschale (Achse links) und der Anzahl der Volumenelemente (Achse rechts) für die Vergleichsrechnung aus Abb. 12 bei verschiedenen Außenradien r_2 . Oberflächenelemente auf der Kugelschale (hellblaue Kreuze); Oberflächenelemente der inneren Kugel (rote Kreuze); Volumenelemente im Zwischenraum (blaue Punkte).

Der betrachtete Kugelkondensator (Abb. 9) hat einen Innenradius von $r_1 = 1\text{cm}$ und ein im Hohlraum befindliches Dielektrikum mit $\epsilon_r = 1000$. Die Kapazität C und deren Sensitivität dC/dr_2 wurde bei verschiedenen Außenradien r_2 im Bereich $[2.0\text{cm}, \dots, 9.0\text{cm}]$ bestimmt und ist in Abb. 12 dargestellt. Die Ergebnisse stimmen mit den analytischen Lösungen aus den Gleichungen (4.3) und (4.5) überein und besitzen einen Fehler, der im Falle der Kapazitäten unterhalb von ca. 0.3% und im Falle der Sensitivitäten unterhalb von ca. 0.5% liegt. Die Kurven der analytischen Lösungen und die ermittelten Werte schneiden sich, was zu dem dargestellten Fehlerverhalten führt. Die Betrachtung der Anzahl der Oberflächenelemente (innere Kugel und Kugelschale) und der Anzahl der Elemente im Zwischenraum liefert keine Korrelation zu dem beobachteten Fehlerverhalten (Abb. 10).

Zur Analyse des Konvergenzverhaltens sind die Kapazität C und die Sensitivität dC/dr_2 bei einem Außenradius $r_2 = 3\text{cm}$ für unterschiedliche Gitterkonfigurationen berechnet worden. Die dazugehörigen Ergebnisse sind in Abb. 13 dargestellt und zeigen einen abnehmenden Fehler bei steigender Anzahl der Gitterzellen.



(a)

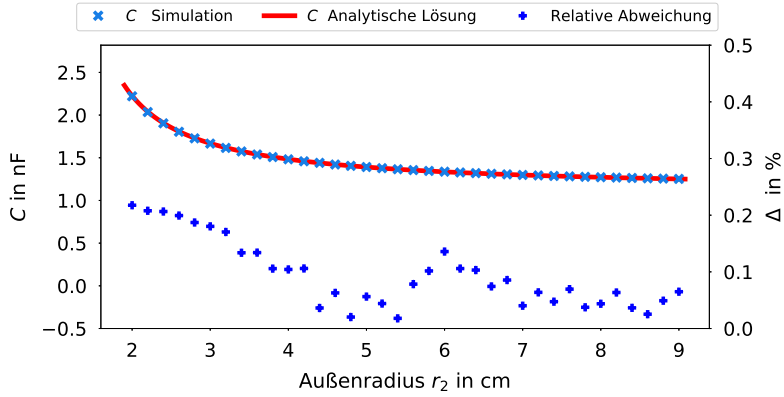


(b)

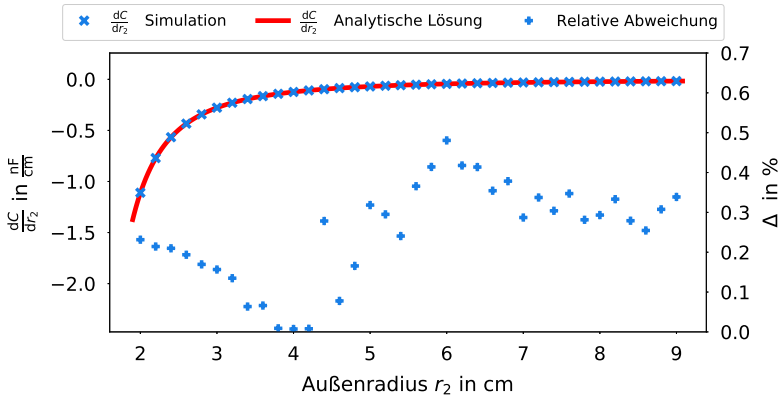
Abbildung 11: Vergleich von analytischen Lösungen mit simulierten Werten für die Kapazität C und deren Sensitivität dC/dd des Plattenkondensators bei verschiedenen Abständen d im Bereich $[3.0\text{cm}, \dots, 6.0\text{cm}]$ mit einer relativen Permittivität $\epsilon_r = 1000$ und einer Fläche $A = 100\text{cm}^2$. Analytische Lösung (rote Kurve); Simulationswerte (hellblaue Kreuze); absolute Abweichung (blaue Pluszeichen).

a) Kapazität C ; analytische Lösung aus Gl. (4.1).

b) Geometrische Sensitivität der Kapazität C bzgl. des Abstandes d ; analytische Lösung aus Gl. (4.2).



(a)

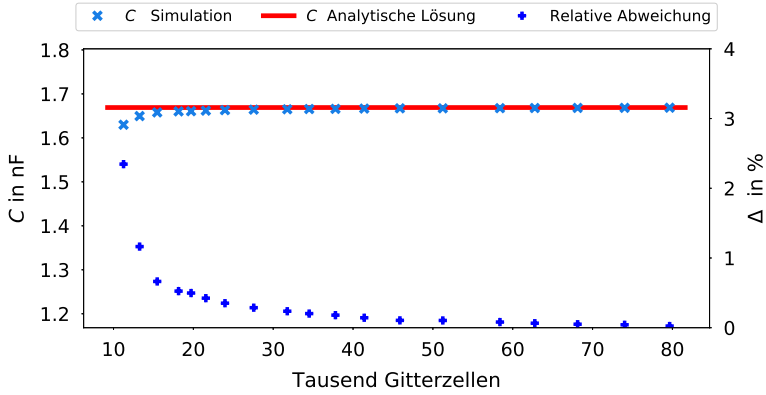


(b)

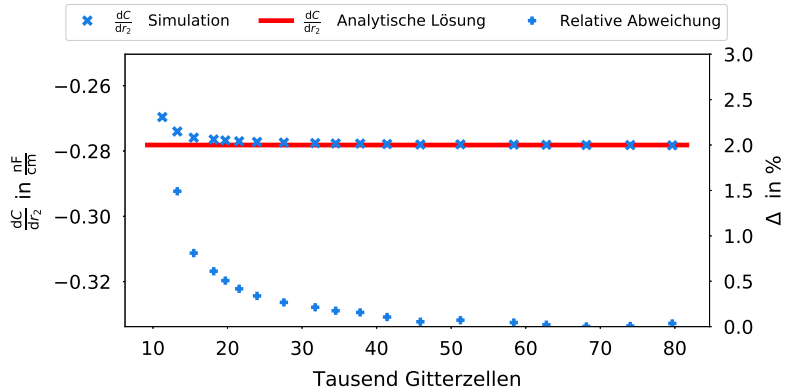
Abbildung 12: Vergleich von analytischen Lösungen mit simulierten Werten für die Kapazität C und deren Sensitivität dC/dr_2 des Kugelkondensators bei verschiedenen Außenradien r_2 im Bereich $[2.0\text{cm}, \dots, 9.0\text{cm}]$ mit einer relativen Permittivität von $\epsilon_r = 1000$ und einem Innenradius $r_1 = 1\text{cm}$. Analytische Lösung (rote Kurve); Simulationenwerte (hellblaue Kreuze); relative Abweichung in % (blaue Pluszeichen).

a) Kapazität C ; analytische Lösung aus Gl. (4.3).

b) Geometrische Sensitivität der Kapazität C bzgl. des Außenradius r_2 ; analytische Lösung aus Gl. (4.5).



(a)

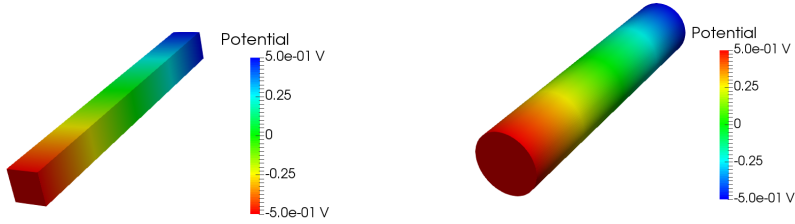


(b)

Abbildung 13: Konvergenzverhalten der Kapazität C und deren Sensitivität dC/dr_2 bzgl. der Anzahl von Gitterzellen bezogen auf einen Kugelkondensator mit einem Innenradius $r_1 = 1\text{cm}$, einem Außenradius $r_2 = 3\text{cm}$ und einer relativen Permittivität von $\varepsilon_r = 1000$. Analytische Lösung (rote Kurve); Simulationswerte (hellblaue Kreuze); relative Abweichung in % (blaue Pluszeichen).

a) Kapazität C ; Analytische Lösung aus Gl. (4.3).

b) Geometrische Sensitivität der Kapazität C bzgl. des Außenradius r_2 ; Analytische Lösung aus Gl. (4.5).



(a)

(b)

Abbildung 14: Darstellung der, zur Validation der extrahierten Widerstände und deren Sensitivitäten, verwendeten Modelle. Zu sehen ist hier zusätzlich die Potentialverteilung auf der Oberfläche.

- a) Kurzes Drahtstück mit rechteckiger Querschnittsfläche.
- b) Kurzes Drahtstück mit kreisförmiger Querschnittsfläche.

4.2 Ohm'sche Widerstände

Betrachtet wird jeweils ein Drahtstück mit kreisrunder und quadratischer Querschnittsfläche (Abb. 14). Der extrahierte Ohm'schen Widerstand R und dessen Sensitivität dR/dp sollen mit der analytischen Lösung verglichen werden. Die analytische Lösung des Widerstandes R für einen Ohm'schen Leiter mit der Querschnittsfläche A , der Länge l und einem spezifischen Widerstand ρ_s bzw. der Leitfähigkeit σ beträgt [22]:

$$R = \rho_s \cdot \frac{l}{A} = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{l}{A} \quad . \quad (4.6)$$

Die Sensitivität des Widerstandes bei Veränderung eines Parameters p der Querschnittsfläche ergibt durch Differentiation der obigen Gleichung:

$$\frac{dR}{dp} = \frac{\partial R}{\partial A} \cdot \frac{dA}{dp} = -\frac{l}{\sigma A^2} \cdot \frac{dA}{dp} \quad . \quad (4.7)$$

Für ein rechteckiges Drahtstück mit der, durch die Kantenlängen a und b definierten Querschnittsfläche $A = a \cdot b$ ergibt sich die Sensitivität bzgl. der Kantenlänge a mit Gl. (4.7) zu:

$$\frac{dR}{da} = -\frac{l}{\sigma} \cdot \frac{1}{a^2 b} \quad . \quad (4.8)$$

Für eine kreisförmige, durch den Radius r definierte Querschnittsfläche $A = r^2 \pi$ ergibt sich die Sensitivität bzgl. des Radiuses r analog zu:


$$\frac{dR}{dr} = -\frac{2l}{\sigma} \cdot \frac{1}{\pi r^3} \quad . \quad (4.9)$$

Exemplarisch wurde das Drahtstück mit rechteckiger Querschnittsfläche mit einer Länge von $l = 10\text{cm}$, einer Kantenlänge $b = 1\text{cm}$ und der Leitfähigkeit von Kupfer $\sigma = 5.8e7 \frac{\text{S}}{\text{m}}$ [33] für die Vergleichsrechnungen gewählt. Der Widerstand R und dessen Sensitivität dR/da wurden bei verschiedenen Kantenlängen a im Bereich $[1.0\text{cm}, \dots, 3.0\text{cm}]$ berechnet (siehe Abb. 15).

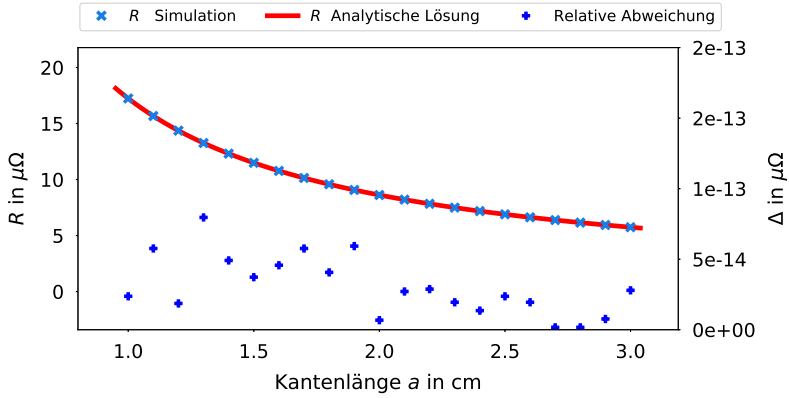
Sowohl im analytischen als auch im simulativen Modell wird ein homogener Stromfluss angenommen und das Modell besteht ausschließlich aus planaren Strukturen. Dies führt zu einer Übereinstimmung der Werte, deren Fehler im Bereich der numerischen Genauigkeit liegt. Die dazu höheren Abweichungen der Sensitivitäten, die unterhalb von ca. $1 \cdot 10^{-11} \mu\Omega/\text{cm}$ liegen, sind in dem FE Operator $d\mathcal{L}/da$ zu begründen, der durch eine finite Differenz angenähert wurde.

Das gleiche numerische Experiment wurde für einen Leiter mit einer kreisförmigen Querschnittsfläche mit einer Länge $l = 10\text{cm}$ und einer Leitfähigkeit von Kupfer $\sigma = 5.8e7 \text{ S/m}$ [33] durchgeführt. Die Ergebnisse der Berechnung bei verschiedenen Radien r im Bereich $[1.0\text{cm}, \dots, 3.0\text{cm}]$ für den Widerstand R und dessen Sensitivität dR/dr sind in Abb. 16 dargestellt.

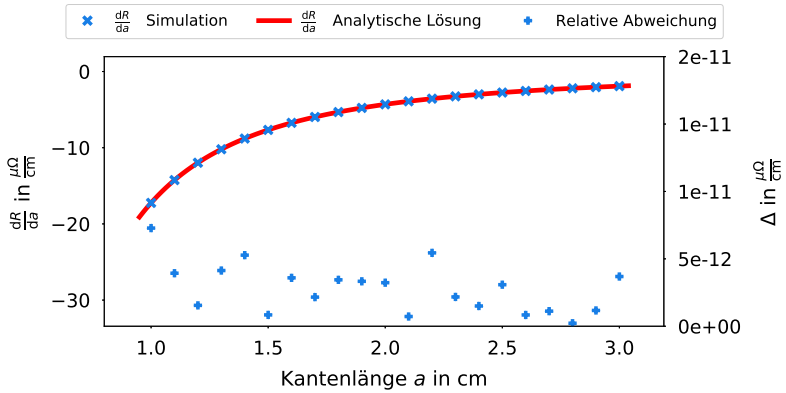
Auch hier stimmen die extrahierten Werte mit den analytischen Werten überein und der Fehler liegt unterhalb von 0.05 %. Jedoch ist hier eine deutlich höhere Abweichung im Verhältnis zum vorherigen Beispiel zu beobachten. Grund hierfür ist der, bei der Diskretisierung gekrümmter Oberflächen auftretende, Diskretisierungsfehler. Sogenannte „curved elements“ standen für die Berechnung nicht zur Verfügung. Trotz des steigenden Radiuses bleiben die Oberflächenelemente näherungsweise konstant, was vermutlich zu dem konstantem relativen



Fehler führt. Ein Konvergenzverhalten bzgl. der Gitteranzahl kann in Abb. 17 gefunden werden. Dort kann mit ansteigender Gitteranzahl eine Annäherung des simulativen Wertes an den analytischen Wert beobachtet werden.



(a)

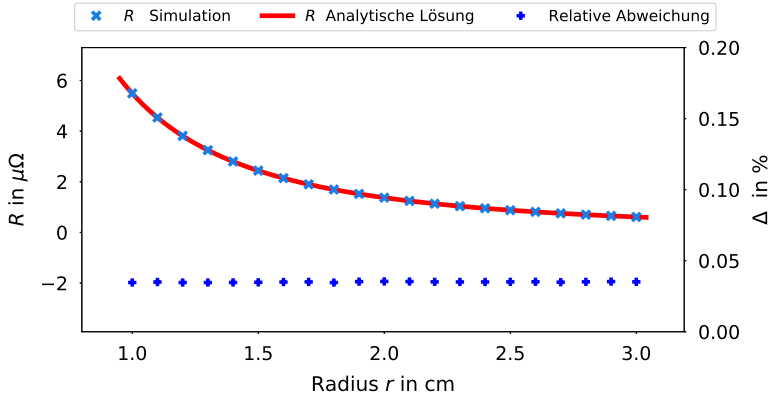


(b)

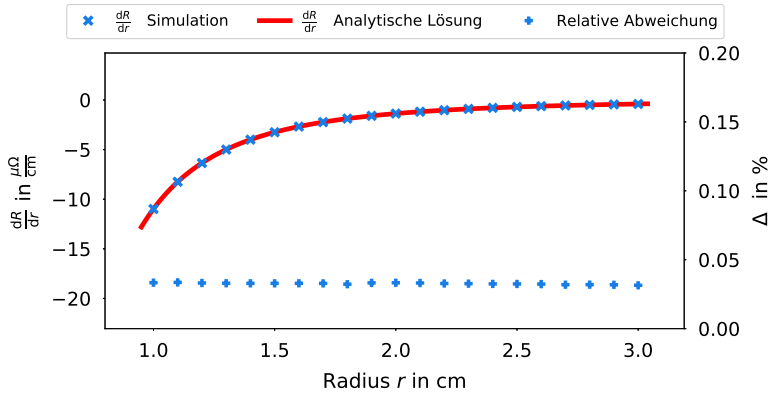
Abbildung 15: Vergleich von analytischen Lösungen mit simulierten Werten für den Widerstand R und dessen Sensitivität dR/da bei verschiedenen Kantenlängen a im Bereich $[1.0\text{cm}, \dots, 3.0\text{cm}]$ für einen Ohm'schen Leiter mit rechteckiger Querschnittsfläche mit einer Länge $l = 10\text{cm}$ und einer Leitfähigkeit von $\sigma = 5.8e7 \frac{\text{S}}{\text{m}}$. Analytische Lösung (rote Kurve); Simulationenwerte (hellblaue Kreuze); absolute Abweichung (blaue Pluszeichen).

a) Widerstand R ; analytische Lösung aus Gl. (4.6).

b) Geometrische Sensitivität des Widerstandes R bzgl. der Kantenlänge a ; analytische Lösung aus Gl. (4.8).



(a)

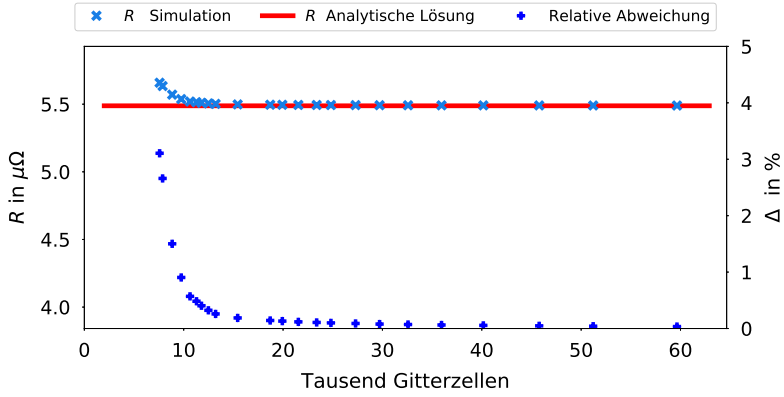


(b)

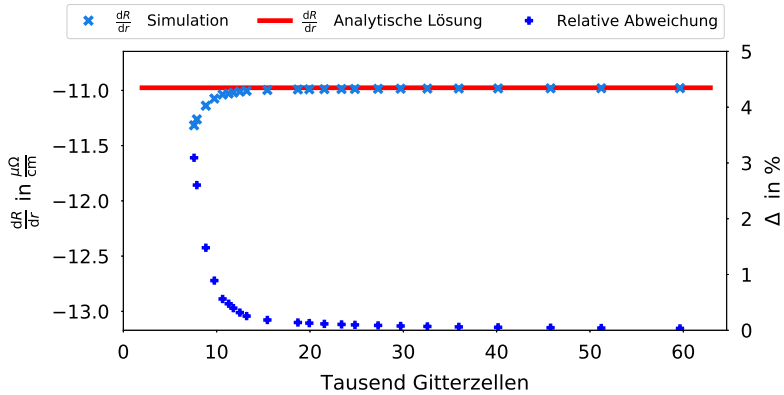
Abbildung 16: Vergleich von analytischen Lösungen mit simulierten Werten für den Widerstand R und dessen Sensitivität dR/dr bei verschiedenen Radien r im Bereich $[1.0\text{cm}, \dots, 3.0\text{cm}]$ für einen Ohm'schen Leiter mit kreisförmiger Querschnittsfläche mit der Länge $l = 10\text{cm}$ und einer Leitfähigkeit von $\sigma = 5.8e7 \frac{\text{S}}{\text{m}}$. Analytische Lösung (rote Kurve); Simulationenwerte (hellblaue Kreuze); relative Abweichung in % (blaue Pluszeichen).

a) Widerstand R ; analytische Lösung aus Gl. (4.6).

b) Geometrische Sensitivität des Widerstandes R bzgl. des Radius r ; analytische Lösung aus Gl. (4.9).



(a)



(b)

Abbildung 17: Konvergenzverhalten des Widerstandes R und der Sensitivität dR/da bzgl. der Anzahl von Gitterzellen des ohm'schen Leiters mit kreisförmiger Querschnittsfläche mit einem Radius $r = 1\text{cm}$, einer Länge von $l = 10\text{cm}$ und einer Leitfähigkeit von $\sigma = 5.8e7 \frac{\text{S}}{\text{m}}$. Analytische Lösung (rote Kurve); Simulationswerte (hellblaue Kreuze); relative Abweichung in % (blaue Pluszeichen).

a) Widerstand R ; Analytische Lösung aus Gl. (4.6).

b) Geometrische Sensitivität des Widerstandes R bzgl. des Radius r ; Analytische Lösung aus Gl. (4.9).



Abbildung 18: Nicht maßstabsgetreue Illustration des betrachteten zylindrischen Drahtes mit einem Radius r_w und einer Länge l . Die farblich hervorgehobenen Flächen markieren Einspeiseflächen (Terminals) des Stromflusses $\nabla \cdot \mathbf{j}_s$.

4.3 Induktivitäten

Die induktiven Bestandteile des Ersatzschaltbildes sind die Eigen- und Gegeninduktivitäten und die damit verbundenen Koppelfaktoren. Die Validation der Verfahren zur Extraktion der Netzwerkparameter und deren Sensitivitäten an analytisch ableitbaren Ausdrücken erfolgt zweigeteilt. Ein einzelner zylindrischer Draht ermöglicht die Überprüfung bzgl. der Eigeninduktivitäten und zwei identische zylindrische Drähte bzgl. der Gegeninduktivitäten und den daraus abgeleiteten Faktoren (z.B. Koppelfaktoren).

Zylindrischer Draht

Betrachtet wird ein einzelner zylindrischer Draht mit Radius r_w und Länge l . Dieser besitzt eine partielle Eigeninduktivität L , die durch den folgenden, in [27] abgeleiteten analytischen Ausdruck, gegeben ist:

$$L(r_w, l) = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[r_w - \sqrt{l^2 + r_w^2} + l \log \left(\sqrt{1 + \frac{l^2}{r_w^2}} + \frac{l}{r_w} \right) \right], \quad (4.10)$$

wobei μ_0 die Permeabilität im Vakuum ist. Diese Eigeninduktivität lässt eine Überprüfbarkeit der Sensitivitäten bzgl. des Radius r_w und der Länge l zu. Die Sensitivität der Eigeninduktivität bzgl. des Radius r_w ergibt sich durch Differentiation von Gl. (4.10) nach dem Radius:

$$\frac{dL(r_w, l)}{dr_w} = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[1 - \frac{l}{r_w \sqrt{1 + \frac{r_w^2}{l^2}}} - \frac{r_w^2}{l^2 \sqrt{1 + \frac{l^2}{r_w^2}}} \right] \quad (4.11)$$

Die Sensitivität bezüglich der Länge ergibt sich durch Differentiation von Gl. (4.10) nach der Länge:

$$\begin{aligned} \frac{dL(r_w, l)}{dl} = & \\ & - \frac{\mu_0}{2\pi(l^2 + r_w^2)} \left[l^2 \sqrt{1 + \frac{r_w^2}{l^2}} - l r_w \sqrt{1 + \frac{l^2}{r_w^2}} - (l^2 + r_w^2) \log \left(1 + \sqrt{\frac{l^2}{r_w^2} + \frac{l}{r_w}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Die assoziierte geometrische Modifikation hinter dieser Sensitivität ist eine Verschiebung einer der kreisförmigen Oberflächen, in welche die Anregungen aus Gl. (2.63) eingeprägt werden (eingefärbte Flächen in Abb. 18). Aus diesem Grund ist hier eine Berücksichtigung der Änderung des Anregungsterms \mathbf{dy}/dl aus Gl. (3.40) erforderlich. In den meisten Fällen können die zu verschiebenden Flächen so gewählt werden, dass in ihnen keine Anregung eingeprägt wurde. Dennoch soll mit der Sensitivität $dL(r_w, l)/dl$ die Richtigkeit von Gl. (3.40) überprüft werden.

Bei den Vergleichsrechnungen muss darauf geachtet werden, unter welchen Voraussetzungen das analytische und das simulierte Modell übereinstimmen. Die analytisch abgeleitete Lösung impliziert die Annahme von homogenen Stromflüssen und einen freien Raum. Bei den betrachteten numerischen Modellen wird zur Vereinfachung bei leitenden Strukturen die finite Leitfähigkeit durch eine unendliche Leitfähigkeit ersetzt. Anstatt der offenen Randbedingungen wurden magnetische Randbedingungen gewählt. Um die Unterschiede, hervorgerufen durch die Annahme der unendlichen Leitfähigkeit, klein zu halten wurde ein Bereich des Radiuses gewählt der klein im Verhältnis zur Länge $l = 100\text{mm}$ des zylindrischen Drahtes ist. Die durch die magnetischen Rand-

bedingungen hervorgerufenen Unterschiede wurden gering gehalten, indem das Simulationsgebiet mit dem 3.5-fachen der Länge l abzüglich 10mm, in alle Raumrichtungen zum jeweiligen äußersten Punkt des Drahtes, gewählt wurde (Simulationsvolumen).

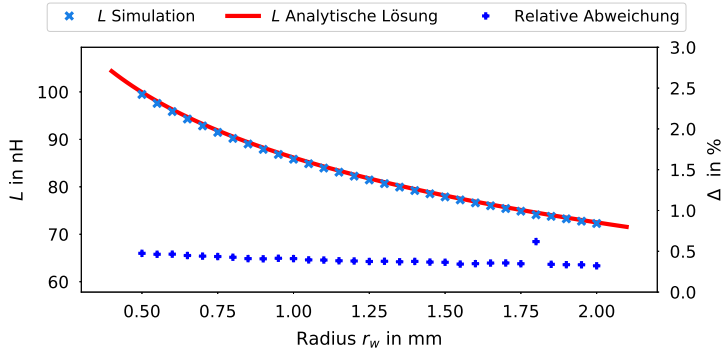
Im ersten numerischen Experiment wurde die Eigeninduktivität L und deren Sensitivität dL/dr_w bei verschiedenen Radien r_w im Bereich $[0.5\text{mm}, \dots, 2.0\text{mm}]$ extrahiert und mit den analytischen Lösungen aus Gl. (4.10) und Gl. (4.11) verglichen. Die Ergebnisse dieser Rechnungen sind in Abb. 19 dargestellt, stimmen überein und besitzen im Falle der extrahierten Eigeninduktivität einen Fehler unterhalb von ca. 0.8% und im Falle der Sensitivitäten unterhalb von ca. 1.8%. Der betrachtete Bereich des Radiuses wurde so gewählt, dass trotz anwachsendem Radius die Länge l im Verhältnis groß bleibt. Dies hält die oben beschriebenen Unterschiede zwischen analytischen und simulativen Modellen, bzgl. der Vereinfachung der leitenden Strukturen gering. Die durch die Gittergenerierung konstant gehaltene Zahl der Oberflächenelemente, bei steigendem Radius, führt zu einem näherungsweise konstanten Fehlerverlauf für die extrahierten Eigeninduktivitäten (siehe Abb. 19a).

Der ansteigende Fehlerverlauf der extrahierten Sensitivitäten aus Abb. 19b ist möglicherweise durch den wachsenden Diskretisierungsfehler bei der Berechnung des FE Operatoren dS/dr_w und dT/dr_w zu finden.

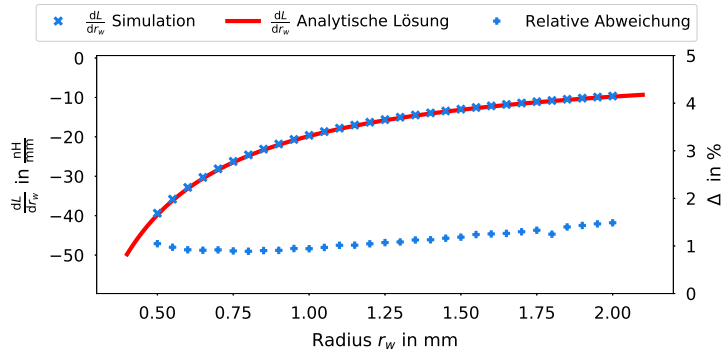
Im zweiten numerischen Experiment wurde die Eigeninduktivität L und deren Sensitivität dL/dl bei verschiedenen Längen l im Bereich $[100\text{mm}, \dots, 130\text{mm}]$ bei einem festgehaltenen Radius $r_w = 1\text{mm}$ extrahiert und mit den analytischen Lösungen aus Gl. (4.10) und Gl. (4.12) verglichen.

Die Ergebnisse dieser Rechnungen finden sich in Abb. 20, stimmen überein und besitzen im Falle der extrahierten Eigeninduktivitäten einen Fehler unterhalb von ca. 1.0% und im Falle der Sensitivitäten einen Fehler unterhalb von ca. 1.0%. Die ansteigende Länge verbessert die Vergleichbarkeit des simulativen und analytischen Modells, was zu einem abnehmenden Fehler führt.

Das Konvergenzverhalten wurde anhand des ersten Experimentes bei einem festen Radius von $r_w = 2\text{mm}$ untersucht, indem zum einen das Modellgitter und zum anderen das Hintergrundgitter verfeinert wurde. In den Abb. 21 a-d) ist zusätzlich zu beobachten, dass die Verfeinerung des Hintergrundgitters eine Verbesserung der extrahierten Induktivität und eine Verfeinerung des Modellgitters eine Verbesserung der Sensitivität bewirkt.



(a)

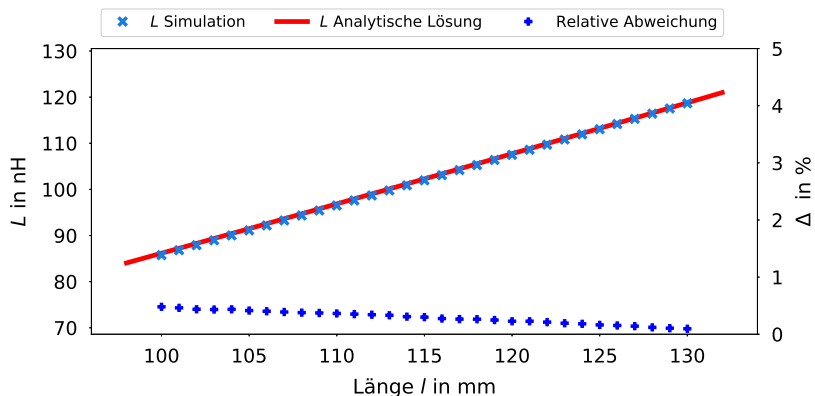


(b)

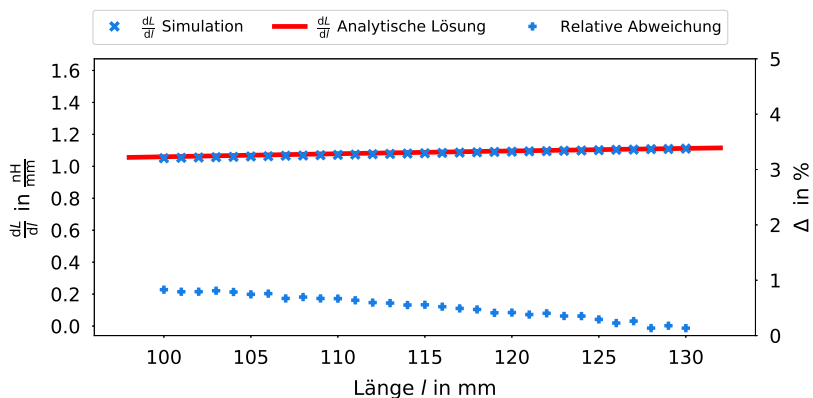
Abbildung 19: Vergleich von analytischen Lösungen mit simulierten Werten für die Induktivität L und deren Sensitivität dL/dr_w für einen einzelnen zylindrischen Draht mit der Länge $l = 100\text{mm}$, bei verschiedenen Radien r_w im Bereich $[0.5\text{mm}, \dots, 2.0\text{mm}]$. Analytische Lösung (rote Kurve); Simulationswerte (hellblaue Kreuze); relative Abweichung in % (blaue Pluszeichen).

a) Eigeninduktivität L ; analytische Lösung aus Gl. (4.10).

b) Geometrische Sensitivität der Eigeninduktivität L bzgl. des Radiuses r_w ; analytische Lösung aus Gl. (4.11).



(a)

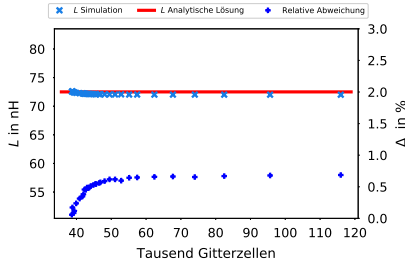


(b)

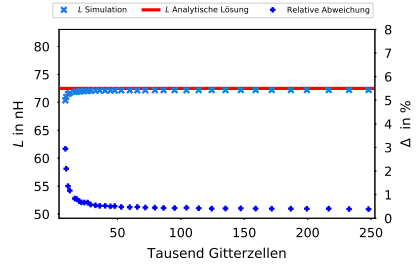
Abbildung 20: Vergleich von analytischen Lösungen mit simulierten Werten für die Induktivität L und deren Sensitivität dL/dl für einen einzelnen zylindrischen Draht mit dem Radius $r_w = 1\text{mm}$, bei verschiedenen Längen l im Bereich $[100\text{mm}, \dots, 130\text{mm}]$. Analytische Lösung (rote Kurve); Simulationswerte (hellblaue Kreuze); relative Abweichung in % (blaue Pluszeichen).

a) Eigeninduktivität L ; analytische Lösung aus Gl. (4.10).

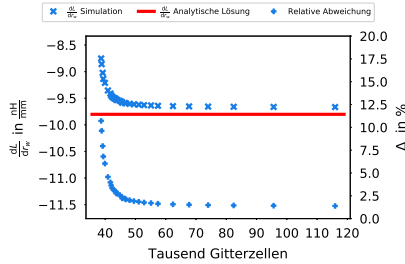
b) Geometrische Sensitivität der Eigeninduktivität L bzgl. der Länge l ; analytische Lösung aus Gl. (4.12).



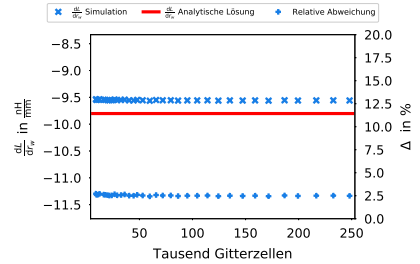
(a)



(b)



(c)



(d)

Abbildung 21: Konvergenzverhalten der Induktivität L und deren Sensitivität dL/dr_w bzgl. der Anzahl von Gitterzellen des zylindrischen Drahtes mit der Länge $l = 100\text{mm}$, bei einem Radius von $r_w = 2\text{mm}$. Das Gitter wurde durch Änderung des Modell- und des Hintergrundgitters verfeinert. Analytische Lösung (rote Kurve); Simulationswerte (hellblaue Kreuze); relative Abweichung in % (blaue Pluszeichen).

a) Auswirkungen auf die Induktivität L durch Verfeinerung des Modellgitters.

b) Auswirkungen auf die Induktivität L durch Verfeinerung des Hintergrundgitters.

c) Auswirkungen auf die Sensitivität dL/dr_w durch Verfeinerung des Modellgitters.

d) Auswirkungen auf die Sensitivität dL/dr_w durch Verfeinerung des Hintergrundgitters.



Abbildung 22: Nicht maßstabsgetreue Illustration der betrachteten, im Abstand d befindlichen, zylindrischen Drähte mit einem Radius r_w und einer Länge l . Die farblich hervorgehobenen Flächen markieren die Einspeiseflächen (Terminals) des Stromflusses $\nabla \cdot \mathbf{j}_s$.

Zwei zylindrische Drähte

Um zusätzlich die partiellen Gegeninduktivitäten und die davon abgeleiteten Koppelfaktoren und deren Sensitivitäten mit analytisch ableitbaren Ausdrücken vergleichen zu können, sollen zwei identische zylindrische Drähte mit dem Radius r_w , der Länge l und der Abstand d zwischen beiden Kreismittelpunkten betrachtet werden (Abb. 22). Für die Gegeninduktivität M zwischen diesen Drähten kann der in [27] abgeleitete Ausdruck gefunden werden:

$$M(r_w, l, d) = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left(\frac{d + r_w}{l} - \sqrt{1 + \frac{(d + r_w)^2}{l^2}} + \log \left[\sqrt{1 + \frac{l^2}{(d + r_w)^2}} + \frac{l}{d + r_w} \right] \right) . \quad (4.13)$$

Der Koppelfaktor kann aus Gl. (2.73) entnommen werden und ist definiert durch:

$$k(r_w, l, d) = \frac{M(r_w, l, d)}{L(r_w, l)} . \quad (4.14)$$

Wobei $L(r_w, l)$ die Eigeninduktivität eines einzelnen Drahtes aus dem System der zwei Drähte beschreibt. Der in Gl. (4.10) angegebene analytische Ausdruck wurde jedoch für die Eigeninduktivität eines einzelnen Drahtes abgeleitet [27]. Numerische Experimente haben gezeigt, dass die partielle Eigeninduktivität der beiden zylindrischen Drähte durch Gl. (4.10) approximiert und bei den betrachteten Abständen als näherungsweise konstant angenommen werden kann (Abb. 23).

Die Sensitivität der Gegeninduktivität M bzgl. des Abstandes d ergibt sich durch Differentiation von (4.13) zu:

$$\frac{dM}{dd} = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[1 - \frac{l^2}{(d+r_w)^2} \left(1 + \frac{l^2}{(d+r_w)^2} \right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{d+r_w}{l} \left(1 + \frac{(d+r_w)^2}{l^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right]. \quad (4.15)$$

Die Sensitivität des Koppelfaktors K bzgl. des Abstandes d wird durch die Differentiation von Gl. (4.14) bestimmt:

$$\frac{dk(r_w, l, d)}{dd} = \frac{\frac{dM(r_w, l, d)}{dd}}{L(r_w, l)} \quad (4.16)$$

Die zwei identischen zylindrischen Drähte wurden mit einer Länge $l = 100\text{mm}$ und einem Radius $r_w = 1\text{mm}$ gewählt und befinden sich im Abstand $d = [30\text{mm}, \dots 60\text{mm}]$. Wie schon im vorherigen Abschnitt erwähnt, hat die Größe des Simulationsvolumens einen Einfluss auf die extrahierten induktiven Bestandteile und wurde deshalb mit dem Abstand anwachsend gewählt ($3.5l + d/2$).

Die Ergebnisse bzgl. der Gegeninduktivität und des Koppelfaktors sind in Abb. 24 für verschiedene Abstände im Bereich $d = [30\text{mm}, \dots 60\text{mm}]$ dargestellt und zeigen beim Vergleich mit den analytisch vorhergesagten Werten eine Abweichung von ca. 0.5 – 4.0% mit ansteigendem Fehler bei wachsendem Abstand. Für die berechnete Sensitivität der Gegeninduktivitäten ist eine Abweichung von ca 2 – 4% zu beobachten (Abb. 26a). Die leicht größere Abweichung bei der Sensitivität des Koppelfaktors (Abb. 26b) ist zu erwarten, da der für den Vergleich verwendete Ausdruck aus Gl. (4.16) aus berechneten Größen zusammengesetzt ist und sich somit die einzelnen Fehler aufsummieren. Die Abweichung liegt bei ca. 4%.

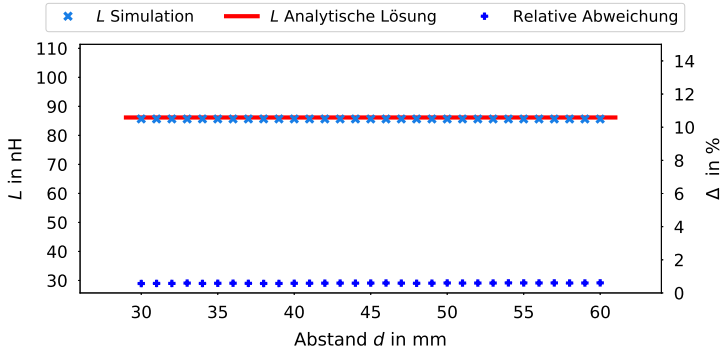
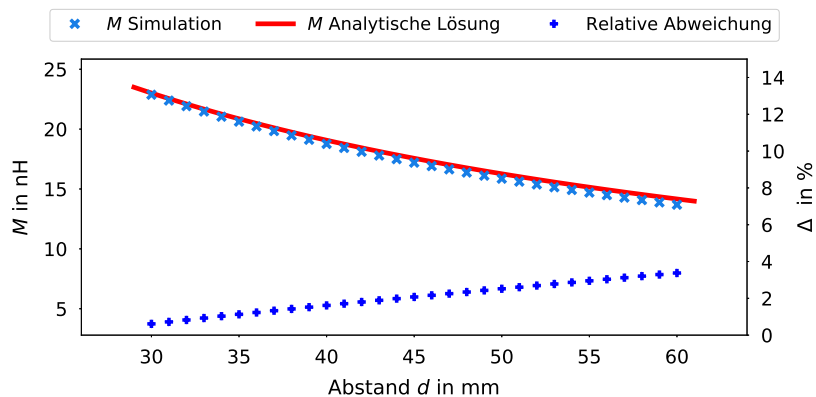
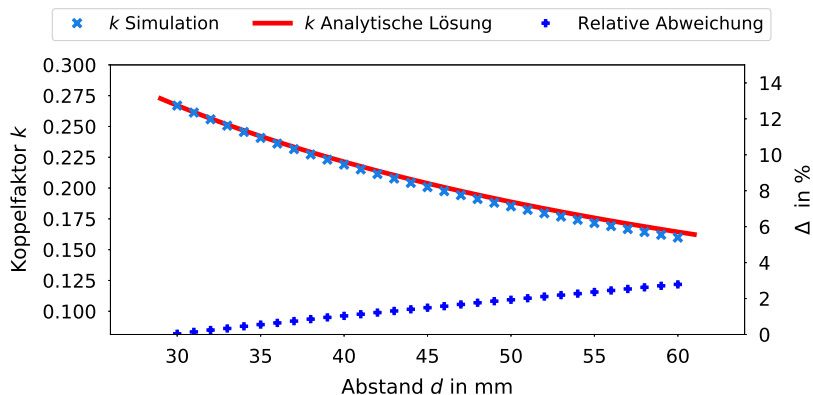


Abbildung 23: Vergleich von extrahierter partielle Eigeninduktivität L zweier zylindrischer Drähte mit der Länge $l = 100\text{mm}$ und einem Drahtdurchmesser $r_w = 1\text{mm}$ bei verschiedenen Abständen mit analytischer Lösung eines einzelnen zylindrischen Drahtes. Analytische Lösung aus Gl. (4.10) (rote Kurve); Simulationswerte (hellblaue Kreuze); relative Abweichung in % (blaue Pluszeichen).

Die Einflüsse der Größe des Simulationsvolumens wurde exemplarisch am Abstand $d = 60\text{mm}$ für die extrahierte Induktivität untersucht und ist in Abb. 25 zu sehen. Mit steigendem Simulationsvolumen nähert sich der extrahierte Wert dem analytisch berechneten Wert an.



(a)

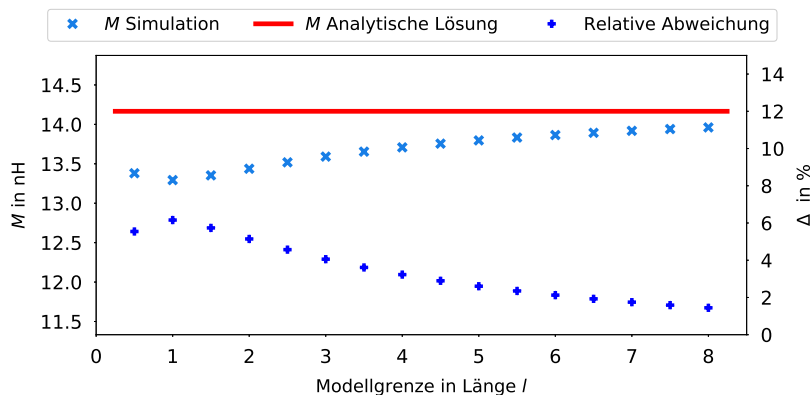


(b)

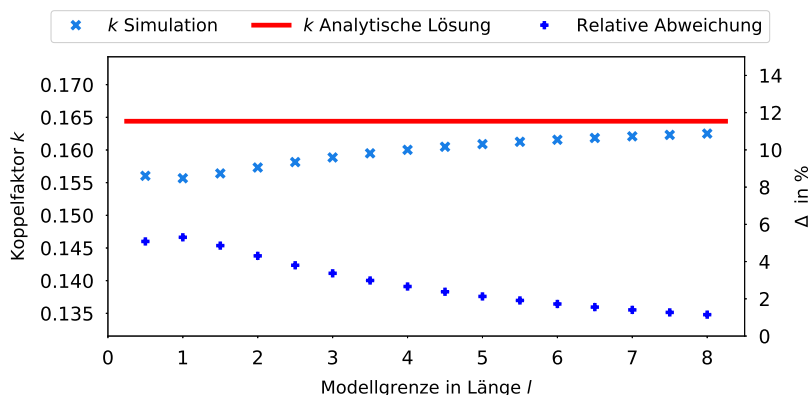
Abbildung 24: Vergleich von analytischen Lösungen mit simulierten Werten für die extrahierte partielle Gegeninduktivität M und den Koppelfaktor k für zwei identische zylindrische Drähte mit der Länge $l = 100\text{mm}$, einem Drahtdurchmesser $r_w = 1\text{mm}$ bei verschiedenen Abständen d . Analytische Lösung (rote Kurve); Simulationswerte (hellblaue Kreuze); relative Abweichung in % (blaue Pluszeichen).

a) partielle Gegeninduktivität M ; analytische Lösung aus Gl. (4.13).

b) Koppelfaktor k ; analytische Lösung aus Gl. (4.14).



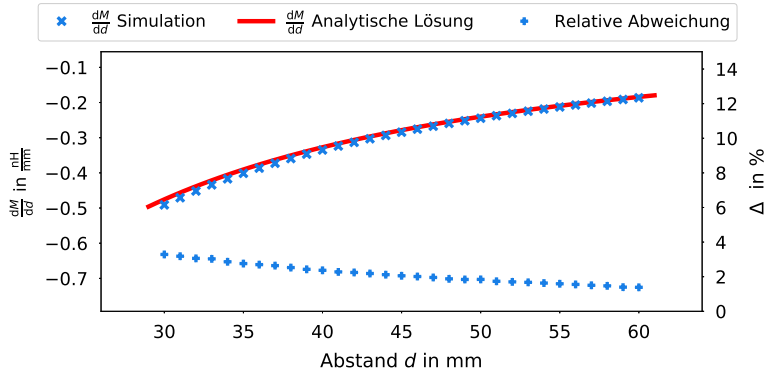
(a)



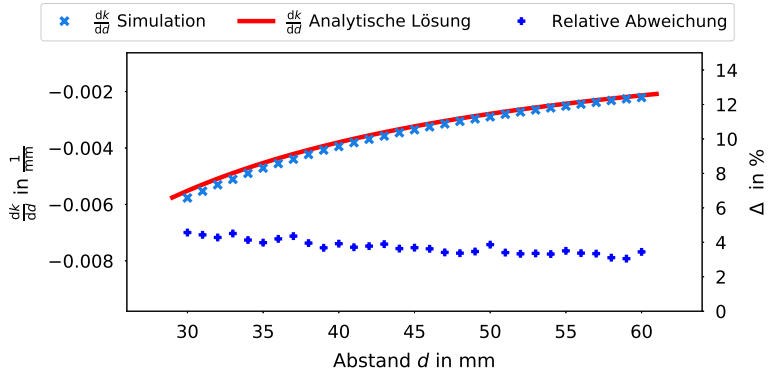
(b)

Abbildung 25: Auswirkung der Größe der Modellgrenze auf die partielle Gegeninduktivität und den Koppelfaktor. Vergleich von extrahierten Werten und analytischen Lösungen für zwei identische zylindrische Drähte mit der Länge $l = 100\text{mm}$, einem Drahtdurchmesser $r_w = 1\text{mm}$, einem Abstand $d = 60\text{mm}$ bei verschiedenen Vielfachen der Länge des Drahtes. Analytische Lösung (rote Kurve); Simulationswerte (hellblaue Kreuze); relative Abweichung in % (blaue Pluszeichen).

a) Partielle Gegeninduktivität M ; analytische Lösung aus Gl. (4.13). b) Koppelfaktor k ; analytische Lösung aus Gl. (4.14).



(a)



(b)

Abbildung 26: Vergleich von analytischen Lösungen mit simulierten Werten für die Sensitivitäten der partiellen Gegeninduktivität und des Koppelfaktors für zwei identische zylindrische Drähte mit der Länge $l = 100\text{mm}$, einem Drahtdurchmesser $r_w = 1\text{mm}$ bei verschiedenen Abständen d . Analytische Lösung (rote Kurve); Simulationswerte (hellblaue Kreuze); relative Abweichung in % (blaue Pluszeichen).

a) Sensitivität der partiellen Gegeninduktivität M bzgl. des Abstandes d ; analytische Lösung aus Gl. (4.15).

b) Sensitivität des Koppelfaktors K bzgl. des Abstandes d ; analytische Lösung aus Gl. (4.16).

4.4 Äquivalente parallele Kapazitäten

Für die äquivalenten parallelen Kapazitäten konnte in der Literatur kein analytisch ableitbarer Ausdruck gefunden werden. Daher war die Überprüfung der Verfahren für Extraktion und Berechnung der Sensitivität nur indirekt möglich, indem diese mit den Lösungen von CST MICROWAVE STUDIO[®] verglichen wurden.

Dazu wurde in Anlehnung an [8] das Resonatorsystem aus Abb. 27 gewählt. Dieses besteht aus zwei Spulen (Windungen gegensinnig) mit jeweils einem Kern ($\mu_r = 1000$), welche jeweils zu einem Plattenkondensator galvanisch verbunden sind (Leitfähigkeit $\sigma = 5.8e7 \text{ S/m}$). Die Terminals wurden auf den Innenseiten der Kondensatorplatten platziert.

Die Extraktion wurde mit den in Abschnitt 2 beschriebenen Verfahren durchgeführt, wobei die Kapazitäten einmal über die Eigenmoden und einmal über den Fit der Impedanzen bestimmt wurden. Die Werte der extrahierten Ersatzschaltbildparameter finden sich in Abb. 29.

Der S -Parameter zwischen Port 1 (zwischen T_1 und T_2) und Port 2 (zwischen T_3 und T_4) ist in Abb. 28a dargestellt. Die Sensitivitäten des S -Parameters (Real- und Imaginärteil) bzgl. der Verschiebung der Plattenoberfläche entlang der Flächennormalen sind in den Abbildungen 28b und 28c dargestellt. Der Vergleich der Lösungen der S -Parameter zeigt, dass beide Verfahren zur Extraktion der äquivalenten parallelen Kapazitäten geeignet sind. Die Übereinstimmung ist sowohl für den S -Parameter als auch dessen Sensitivitäten bis ca. 30 MHz gegeben.

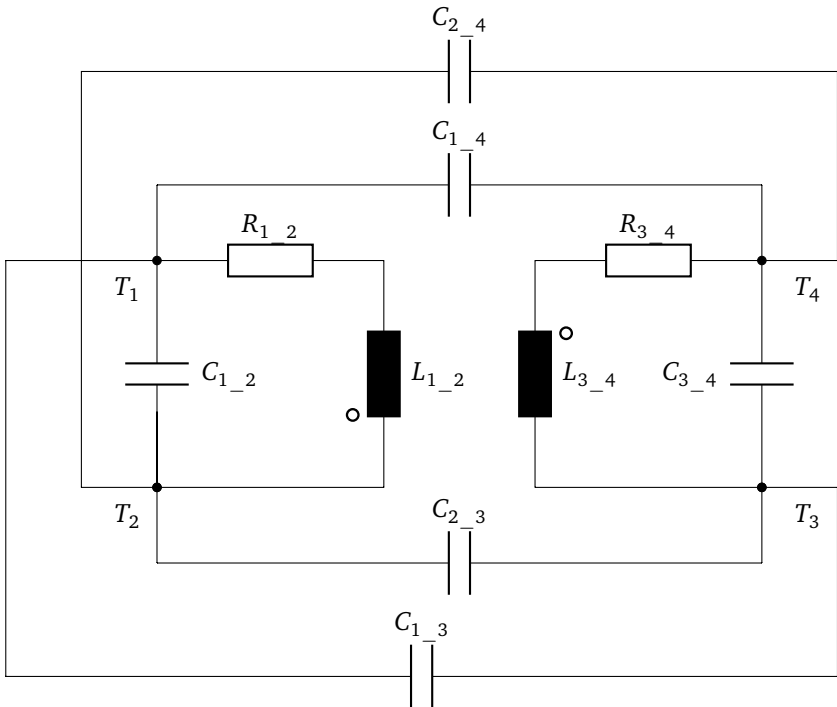
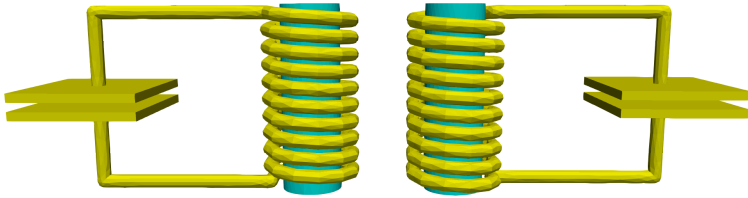
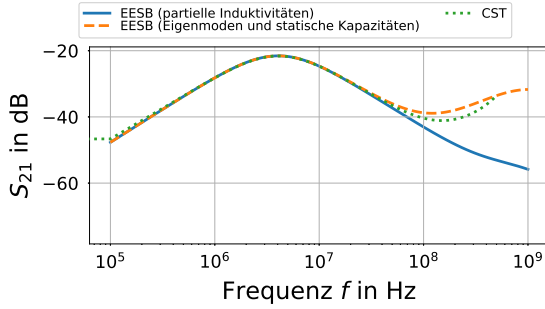
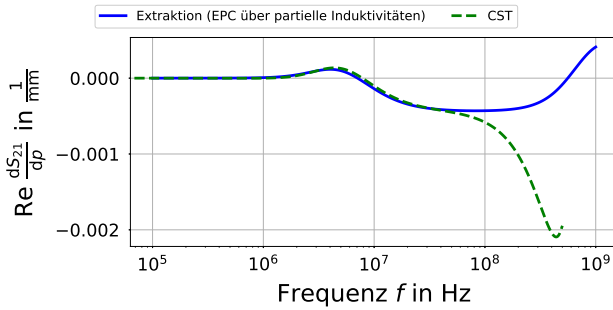


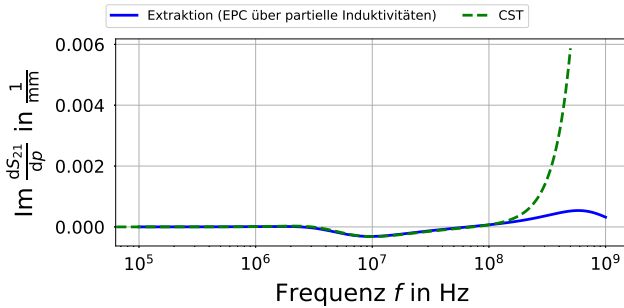
Abbildung 27: L - C Resonatorsystem bestehend aus zwei gegenseitig orientierten Spulen mit Kern ($\mu_r = 1000$), die jeweils mit einem Plattenkondensator galvanisch verbunden sind (Leitfähigkeit $\sigma = 5.8e7 \text{ S/m}$). Die Kreise an den Induktivitäten markieren die Wicklungsrichtungen [34].



(a)



(b)



(c)

Abbildung 28: a) S_{21} -Parameter des L - C -Resonatorsystems b) Realteil der Sensitivität dS/dp des L - C -Resonatorsystems c) Imaginärteil der Sensitivität dS/dp des L - C Resonatorsystems

LC Fit	
R_{1_2}	3.291e-03 Ω
R_{3_4}	3.290e-03 Ω
L_{1_2}	1.975e-06 H
L_{3_4}	1.976e-06 H
C_{1_2}	2.756e-12 F
C_{1_3}	1.188e-12 F
C_{1_4}	1.177e-12 F
C_{2_3}	1.177e-12 F
C_{2_4}	1.188e-12 F
C_{3_4}	2.755e-12 F
$k_{L_{3_4} L_{1_2}}$	-8.320e-02

Eigenmode Extraktion	
R_{1_2}	3.291e-03 Ω
R_{3_4}	3.290e-03 Ω
L_{1_2}	1.975e-06 H
L_{3_4}	1.976e-06 H
C_{1_2}	2.725e-12 F
C_{1_3}	3.591e-13 F
C_{1_4}	2.051e-13 F
C_{2_3}	2.050e-13 F
C_{2_4}	3.585e-13 F
C_{3_4}	2.727e-12 F
$k_{L_{3_4} L_{1_2}}$	-8.320e-02

Abbildung 29: Aus dem in Abb. 27 dargestellten 3D Modell extrahierte Ersatzschaltbildparameter. Die darin enthaltenen Kapazitäten wurden einmal über den Fit der Impedanzen und einmal über die Eigenmoden bestimmt.

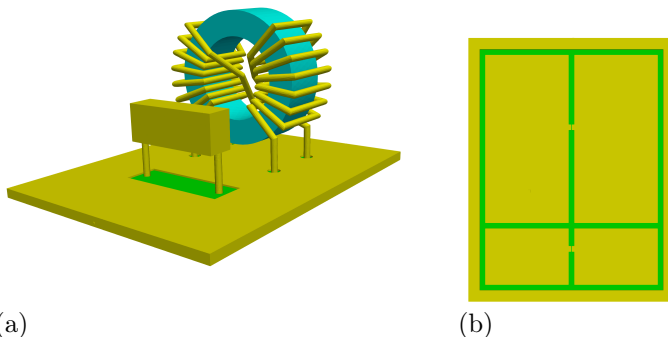


Abbildung 30: Akademische Realisierung eines EMI Filters. Die Leitfähigkeit der Oberflächen (gelb dargestellt) entspricht der Leitfähigkeit von Kupfer ($5.8e7 \text{ S/m}$) [33]. Die relative Permittivität des PCB Substrats (grün dargestellt) wurde mit $\epsilon_r = 4.7$ gewählt.

- a) Oberseite des Filters: Gleichtaktdrossel, welche aus zwei gegenläufig gewickelten Spulen (jeweils 8 Windungen) und einem Kern mit konstanter relativer Permeabilität ($\mu_r = 500$) besteht; Quaderförmige Schleife, welche der Modellierung des induktiven Anteils des Kondensators entspricht (C_x -Kondensator).
- b) Unterseite des Filters: Leiterflächen, wobei sich Port 1 auf der kleineren und Port 2 auf der größeren Leiterfläche befindet.

5 Anwendungsbeispiel: EMI Filter

In diesem Kapitel sollen die Konzepte und Verfahren aus Kapitel 2 und Kapitel 3 auf einen EMI-Filter angewendet werden, welcher auf unserem Beitrag in [12] basiert. Es werden hier alle dort aufgeführten Erkenntnisse und Konzepte wiederholt, detaillierter ausgeführt und erweitert. Für die Berechnung kommt ein leicht modifiziertes 3D Modell des Filters zum Einsatz, wodurch es zu Unterschieden kommen kann.

Einführung

Elektromagnetische Verkopplungen zwischen partiellen Induktivitäten haben einen tiefgreifenden Einfluss auf das Dämpfungsverhalten eines sog. „electro-

magnetic interference (EMI)“-Filters [12], [35], [36]. Ein herkömmliches funktionelles Schaltbild des Filters enthält keine parasitären Elemente und kann somit diese Verkopplungen nicht abbilden (Abb. 34a). Ein extrahiertes äquivalentes Ersatzschaltbild dagegen enthält diese Elemente in Form von parasitären Eigeninduktivitäten und deren Verkopplungen (Abb. 37, 38).

Dieser Unterschied äußert sich deutlich im Transmissionsverhalten des Gegentaktes (Abb. 31). Hier ist eine Verschlechterung des Tiefpassverhaltens des Filters durch die parasitären Eigeninduktivitäten und deren Verkopplungen zu beobachten.

Auch wenn es im Allgemeinen gilt parasitäre Effekte zu vermeiden, so können diese eigentlich unerwünschten Effekte in einem EMI-Filter genutzt werden, um die Gegentaktdämpfung des Filters zu verbessern. Der dabei genutzte Effekt ist die sog. Inductance Cancellation und wird, wie im Folgenden gezeigt, durch eine spezielle geometrische Anordnung erreicht. Anhand dieses Beispiels sollen der Extraktionsprozess und die Sensitivitätsanalyse demonstriert werden.

Reale Bauteile wie ein Folienkondensator mit dünnen Schichten und eine Drossel mit vielen Windungen und einer frequenzabhängigen Permeabilität des Kerns sind mitunter schwer in einer 3D-Struktur zu modellieren. Daher wurde das in Abb. 30 dargestellte akademische Modell des funktionellen Schaltbildes aus Abb. 34a konstruiert.

Die in Abb. 30a dargestellte Oberseite des Filters zeigt die Gleichtaktdrossel, welche aus zwei gegenläufig gewickelten Windungen (jeweils 8) und einem Kern mit konstanter relativer Permeabilität ($\mu_r = 500$) besteht (siehe Abb. 33). Die Eigenschaften von realen Kondensatoren werden von sog. self-parasitics (ESR und ESL) und den Kopplungen zu anderen induktiven Elementen beeinflusst. Diese Eigenschaften können durch einen leitenden Block modelliert werden, welcher vor der Drossel lokalisiert ist [12], [37]. Diese geometrische Repräsentation der Induktivität und des Widerstandes eines Kondensators wird im Folgenden als C_x -Korrelat bezeichnet (siehe Abb. 32).

Die Abschirmungselemente (gelb dargestellt) bilden die sog. Massefläche und sind mit den anderen Elementen nicht galvanisch verbunden. Unterhalb dieser befindet sich das PCB Substrat (grün dargestellt) mit einer relativen Permittivität von $\epsilon_r = 4.7$.

Auf der Unterseite des Filters (Abb. 30a) sind die Leiterflächen dargestellt. Die hinteren Anschlüsse der Drossel sind auf die kleineren Leiterbahnen nach unten durchkontaktiert, zwischen welchem sich der Port 1 befindet. Die vorderen Anschlüsse der Drossel sind zu den größeren Leiterflächen verbunden,

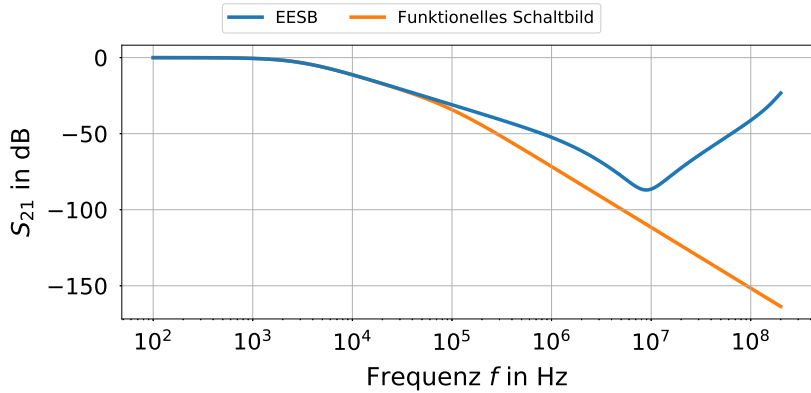


Abbildung 31: Durch die Netzwerksimulation berechneter S_{21} -Parameter des rein funktionellen Ersatzschaltbildes (orange) und des äquivalenten extrahierten Ersatzschaltbildes (blau). Das extrahierte Ersatzschaltbild enthält zusätzliche parasitäre Elemente.

zwischen welchem sich der Port2 befindet. Die Verbindung zwischen großer Leiterfläche und C_x -Korrelat ist unterbrochen. In den dazwischen liegenden Knoten werden im späteren Ersatzschaltbild die Kapazitäten des Kondensators eingesetzt, welche aus Symmetriegründen in zwei Kapazitäten aufgeteilt wird (C_x -Kondensator, siehe Abb. 32).

Um eine Bestimmung des Cancellation Points zu ermöglichen, wurde das Modell derart parametrisiert, dass sich das C_x -Korrelat in der y - z Ebene frei bewegen kann. Im Folgenden werden die willkürlich definierten relativen Koordinaten $P(y_k; z_k)$ verwendet, um die Position des Korrelats zu beschreiben (Abb. 34b).

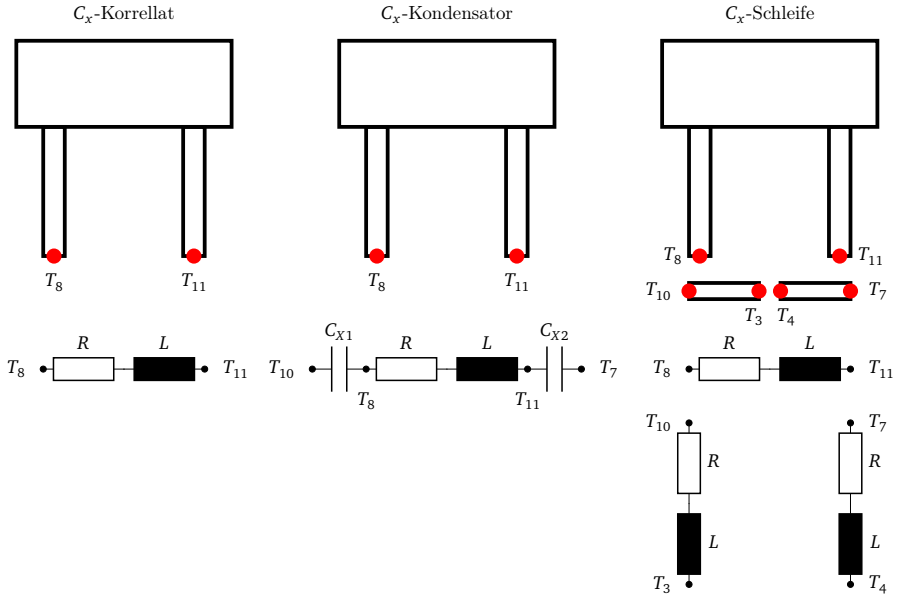


Abbildung 32: Definition der Begrifflichkeiten C_x -Korrelat, C_x -Kondensator und C_x -Schleife. C_x -Korrelat: Geometrische Repräsentation der Induktivität und des Widerstandes eines Kondensators; C_x -Kondensator: C_x -Korrelat inklusive der Kapazität des Kondensators; C_x -Schleife: C_x -Korrelat inklusive der Leiterstücke zwischen Terminal T_3 und T_4 auf der Leiterfläche. In den Abbildungen sind im unteren Bereich die dazugehörigen äquivalenten Ersatzschaltbilder zu sehen. Die Terminals setzen die einzelnen Elemente in Bezug auf das später extrahierte Ersatzschaltbild aus Abb. 37.

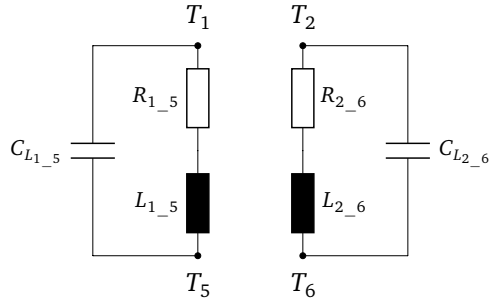
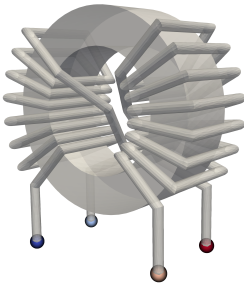


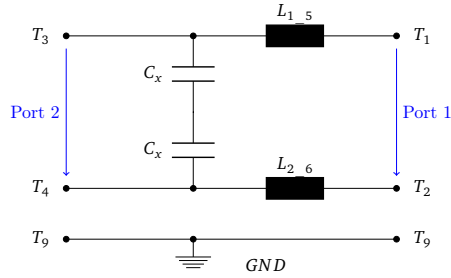
Abbildung 33: Links ist die Darstellung des 3D Modells der verwendeten Gleichtaktrossel zu sehen. Rechts das äquivalente Ersatzschaltbild der Drossel. Die Terminals setzen die einzelnen Elemente in Bezug auf das später extrahierte Ersatzschaltbild aus Abb. 37.

5.1 Extrahiertes äquivalentes Ersatzschaltbild

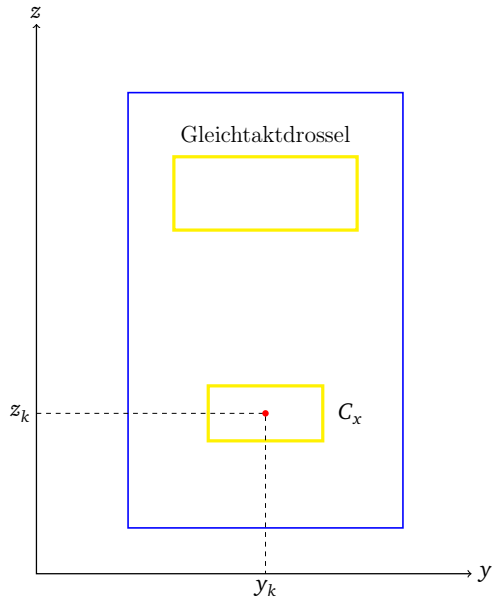
Für die Extraktion des äquivalenten Ersatzschaltbildes werden im 3D Modell sog. Terminals gesetzt, welche den damit assoziierten Knoten des extrahierten Ersatzschaltbildes entsprechen. Die Wahl und die Lokalisierung der Terminals T_1, \dots, T_{11} , für den Fall des betrachteten Filters, sind in Abb. 35 zu finden. Die automatisierte Extraktion des äquivalenten Ersatzschaltbildes erfolgt mit den in Abschnitt 2 dargestellten Verfahren und enthält partielle Induktivitäten und deren Koppelfaktoren, ausschließlich statische Kapazitäten und Ohm'sche Widerstände. Die Kapazitäten ($C_{x1} = C_{x2} = 4.5\mu F$) des C_x -Kondensators werden später im Ersatzschaltbild zwischen den Terminals T_7 und T_{11} und zwischen den Terminals T_8 und T_{10} hinzugefügt.

An der Position $P(y_k = 16.0\text{ mm}; z_k = 16.0\text{ mm})$ des C_x -Korrelats wurde exemplarisch die Extraktion durchgeführt und ist zusammen mit den extrahierten Werten in den Abbildungen 37 und 38 dargestellt. Dieser Punkt befindet sich im ungefähren geometrischen Mittelpunkt bzgl. der y-Richtung und auf der Linie, auf welcher die Cancellation stattfindet (Vgl. 52c).

Die später beschriebene Sensitivitätsanalyse auf Netzwerkebene hat gezeigt, dass die parasitären Kapazitäten kaum einen Einfluss auf die Netzwerkpa-



(a)



(b)

Abbildung 34: a) Funktionelles Ersatzschaltbild des EMI Filters mit geteilter C_x - Kapazität und einer Gleichtaktdrossel (Werte aus Abb. 38). Betrachtet wird die Gegentaktdämpfung. b) Schematische Darstellung der y - z -Ebene von oben auf den Filter. Das blau begrenzte Gebiet stellt die Berandungen der Leiterplatte dar. Die gelben Elemente entsprechen der Gleichtaktdrossel und dem C_x -Korrelat. Letzterer kann in dieser Ebene beliebig vom Punkt $P(y_k; z_k)$ zum Punkt $P(y_k + dy; z_k + dz)$ bewegt werden.

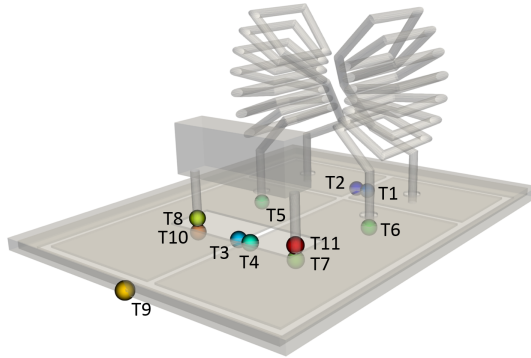


Abbildung 35: Darstellung der leitfähigen Elemente des Filters. Zusätzlich sind die Positionen der Terminals zu sehen, welche mit den Knoten des extrahierten Ersatzschaltbildes assoziiert werden. Die Massefläche liegt in der y - z -Ebene.

parameter haben. Somit konnten bei der Extraktion alle parasitären statischen Kapazitäten, die unterhalb 30% der größten parasitären Kapazität lagen, vernachlässigt werden, wodurch die Rechenzeit reduziert werden konnte.

Durch beschalten des extrahierten Netzwerkes kann in der Netzwerksimulation der S_{21} -Parameter ermittelt und mit der Lösung von CST Microwave Studio verglichen werden (siehe Abb. 36c). Das zu beobachtende, abweichende Verhalten oberhalb von ca. 4 MHz wird durch die fehlenden parallelen Kapazitäten (engl. equivalent parallel capacitance=EPC) der Spulen der Drossel hervorgerufen. Diese Kapazitäten sind zunächst nicht im extrahierten Ersatzschaltbild enthalten, da sich deren Bestimmung komplexer gestaltet.

Im Prinzip könnten diese, analog zu Abschnitt 4.4, mit den in Abschnitt 2 beschriebenen Verfahren, aus der vollständigen Filterstruktur bestimmt werden. Die dazu benötigte Anzahl der Eigenmoden kann jedoch nicht robust mit dem verwendeten „shift-invert“-Verfahren ermittelt werden. Für die Berechnung der Kapazitäten aus dem Fit der Impedanzen müsste eine Anregungstopologie gefunden und eine erhebliche Anzahl von zusätzlichen Berechnungen durchgeführt werden.

Es hat sich gezeigt, dass die Betrachtung der von der Struktur separierten Drossel zielführend ist. Dabei können mit Hilfe der in Abb. 36a und 36b dargestellten zwei niedrigsten Eigenmoden der Drossel die parallelen Kapazitäten

C_{L1_5} und C_{L2_6} mit 933.6fF und mit 933.3fF bestimmt werden. Die hinzugefügten Kapazitäten verbessern die Gültigkeit des Frequenzbereiches (siehe Abb. 36c).

Zusätzlich hat sich gezeigt, dass der Wert der EPCs in guter Näherung unabhängig von der Position des C_x -Korrelats ist und somit als konstant angenommen werden kann.

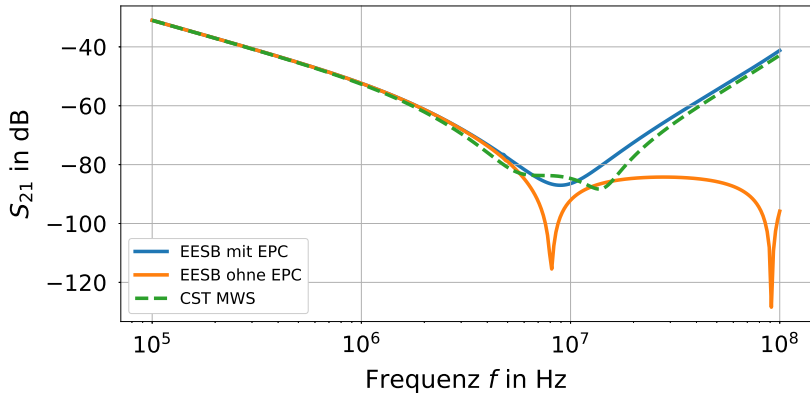
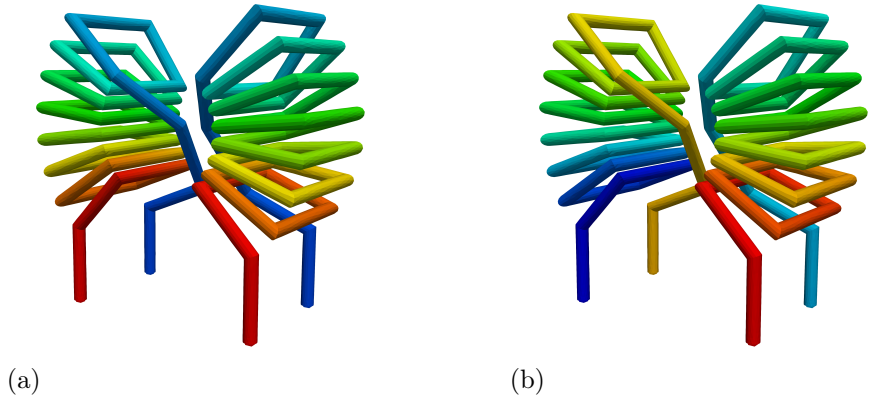


Abbildung 36: a-b) Leitende Bestandteile der Gleichtaktddrossel. Auf der Oberfläche zu sehen ist die Potentialverteilung der beiden niedrigsten Eigenmoden. Die Eigenmode in a) hat eine Eigenfrequenz von ca. 18.756 MHz und in b) eine Eigenfrequenz von ca. 98.038 MHz.

c) Dargestellt ist der S_{21} -Parameter an dem Cancellation Point $P(y_k = 16.0 \text{ mm}; z_k = 16.0 \text{ mm})$: Extrahiertes Ersatzschaltbild (blaue Kurve); Netzwerksimulation ohne der zur Spule der Drossel parallelen Kapazitäten C_{L1_5} und C_{L2_6} (orange Kurve); CST MICROWAVE STUDIO[®] Lösung (grün gestrichelte Kurve)

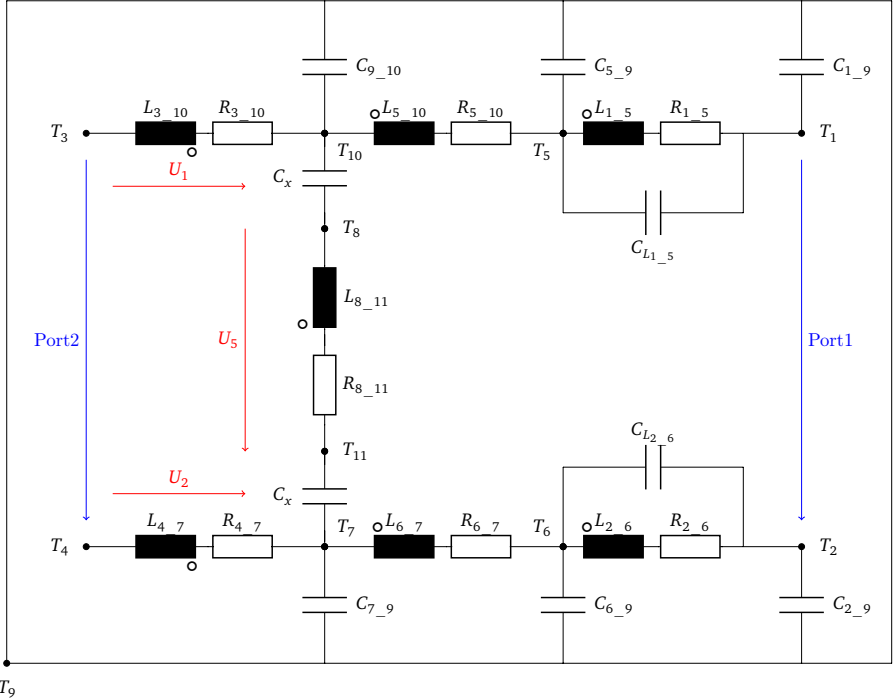


Abbildung 37: Extrahiertes äquivalentes Ersatzschaltbild: Netzwerkelemente (R , L , C); Terminals T_1, \dots, T_{11} ; Äquivalente parallele Kapazitäten C_{L2_6} und C_{L1_5} ; Kapazitäten des C_x -Korrelats; Port1 und Port2. Die rot dargestellten Spannungen stellen die für die Inductance Cancellation relevanten Teilspannungen durch die C_x -Schleife dar. Die Kreise der Induktivitäten markieren die Wicklungsrichtungen [34].



Widerstände R in Ω		Induktivitäten L in H		Kapazitäten C in F	
R_{1_5}	2.707e-03	L_{1_5}	4.271062e-05	C_{1_9}	1.807e-11
R_{2_6}	2.708e-03	L_{2_6}	4.275400e-05	C_{2_9}	1.806e-11
R_{3_10}	7.269e-05	L_{3_10}	4.520030e-09	C_{5_9}	1.898e-11
R_{4_7}	6.548e-05	L_{4_7}	4.490137e-09	C_{6_9}	1.893e-11
R_{5_10}	6.653e-05	L_{5_10}	1.119754e-08	C_{7_9}	2.168e-11
R_{6_7}	5.807e-05	L_{6_7}	1.120062e-08	C_{9_10}	2.157e-11
R_{8_11}	1.869e-04	L_{8_11}	2.400309e-08	C_{1_5}	9.333e-13
				C_{2_6}	9.336e-13
				C_x	4.500e-06

Koppelfaktoren k					
$k_{L_{2_6} L_{1_5}}$	9.445447e-01	$k_{L_{3_10} L_{1_5}}$	3.870548e-02	$k_{L_{3_10} L_{2_6}}$	2.999988e-02
$k_{L_{4_7} L_{1_5}}$	2.722734e-02	$k_{L_{4_7} L_{2_6}}$	3.601033e-02	$k_{L_{4_7} L_{3_10}}$	-1.984492e-01
$k_{L_{5_10} L_{1_5}}$	-5.547655e-02	$k_{L_{5_10} L_{2_6}}$	-5.100222e-02	$k_{L_{5_10} L_{3_10}}$	1.518700e-01
$k_{L_{5_10} L_{4_7}}$	6.422101e-03	$k_{L_{6_7} L_{1_5}}$	-5.361148e-02	$k_{L_{6_7} L_{2_6}}$	-5.817498e-02
$k_{L_{6_7} L_{3_10}}$	1.354499e-02	$k_{L_{6_7} L_{4_7}}$	1.352431e-01	$k_{L_{6_7} L_{5_10}}$	4.689433e-01
$k_{L_{8_11} L_{1_5}}$	-1.499452e-02	$k_{L_{8_11} L_{2_6}}$	1.208050e-02	$k_{L_{8_11} L_{3_10}}$	-2.712213e-01
$k_{L_{8_11} L_{4_7}}$	2.732755e-01	$k_{L_{8_11} L_{5_10}}$	-1.315565e-02	$k_{L_{8_11} L_{6_7}}$	6.217864e-03

Abbildung 38: Bei der Extraktion ermittelte Werte des EESB aus Abb. 37 am Punkt $P(16.0mm; 16.0mm)$. Rot markiert sind Koppelfaktoren, welche an einer Interaktion zwischen C_x -Korrelat und der Drossel beteiligt sind.

5.2 Inductance Cancellation

Durch den Vergleich des funktionellen Schaltbildes mit dem extrahierten Ersatzschaltbild konnte beobachtet werden, dass die parasitären Effekte, repräsentiert durch parasitäre Elemente, sich negativ auf das Dämpfungsverhalten des Filters auswirken.

Die parasitären induktiven Effekte können genutzt werden, um die Gegentakt-dämpfung zu verbessern, indem eine spezifische Position des C_x -Korrelats gefunden wird. Diese Position ist der sog. "Cancellation Point (CP)" und der dort auftretende Effekt, die sog. „Inductance Cancellation“ (InC). Die InC kann aus der Feld- und Ersatzschaltbildperspektive beschrieben werden:

- Aus der Feldperspektive wird die InC erreicht, wenn das durch die Gegentaktströme der Gleichtaktdrossel erzeugte magnetische Streufeld die Felder, erzeugt durch die Ströme der C_x -Schleife (Def. in Abb. 32), kompensiert. Auch wenn dieser Effekt nicht explizit in einem Feldbild dargestellt werden kann, kann die Andeutung des Effekts durch einen Schnitt in der y - z -Achse veranschaulicht werden (Abb. 40a). Hier ist eine Auslöschung des Feldes im Bereich des C_x -Korrelats zu sehen.
- Aus der Ersatzschaltbildperspektive induzieren die durch die C_x -Schleife fließenden Ströme eine Spannung (siehe Abb. 40b). Ebenso werden dort Spannungen durch die Gegentaktströme in der Drossel und durch die Gegeninduktivitäten induziert. Am CP kompensieren sich diese derart, dass sich die Summe der betrachteten Teilspannungen zu null addieren:

$$U_{\text{Sum}} = U_1 + U_2 + U_5 = 0 \quad . \quad (5.1)$$

Durch die Extraktion des EESB an einem Punkt vor dem CP bei $P(16.0; 12.0)$, am CP bei $P(16.0; 16.0)$ und nach dem CP bei $P(16.0; 19.0)$, kann in einer Netzwerksimulation die Spannung durch die C_x -Schleife ermittelt werden. Die Ergebnisse sind in Abb. 41a dargestellt und zeigen am CP eine Nullsummenspannung bis ca. 20 MHz. Zusätzlich zeigt das in Abb. 41b dargestellte Transmissionsverhalten eine breitbandige Verbesserung der Dämpfung.

Mit diesen Ergebnissen kann somit ein direkter Zusammenhang zwischen der Spannung durch die C_x -Schleife und dem Transmissionsverhalten hergestellt

werden.

Die Nullstelle der Spannung durch die C_x -Schleife bzgl. der y - oder z -Richtung kann mit dem Newtonverfahren [38] iterativ ermittelt werden. Dazu wird der Wert der Funktion und dessen Ableitung für die Position des C_x -Korrelats benötigt. Wird die Taylorreihenentwicklung der Spannung um diesen Punkt nach dem ersten Glied abgebrochen, so ergibt sich die Tangentengleichung:

$$t_{U_{z_k}}(z) = U(z_k) + U'(z_k)(z - z_k) \quad . \quad (5.2)$$

Die Nullstelle der Spannung wird mit der Tangentennullstelle approximiert. Die Schrittweite dz aus dem bekannten Newton Verfahren ergibt sich zu:

$$z_{k+1} = z_k - \underbrace{\frac{U(z_k)}{U'(z_k)}}_{dz} \quad . \quad (5.3)$$

Durch die Abbildung $(\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R})$ der Position $P(x_k; y_k)$ auf die skalare Funktion der Spannung U_{sum} kann ein mehrdimensionales Newtonverfahren nicht direkt angewendet werden.

Da hier nicht die Effizienz der Optimierung im Fokus liegt, wird von uns das folgende Verfahren vorgeschlagen:

1. Bestimme mit der Spannung $U(y_k; z_k)$ und den Sensitivitäten $\frac{dU_{\text{sum}}}{dy}$ und $\frac{dU_{\text{sum}}}{dz}$ die Schrittweiten in y - und z -Richtung mit Hilfe von Gl. 5.3.
2. Bestimme die Schrittweite in der y - z -Ebene:
 - Falls beide der Schrittweiten im betrachteten Gebiet Ω liegen, gehe zum Punkt $P(y_k + w_y dy; z_k + w_z dz)$ mit den Gewichtungsfaktoren:

$$w_y = \frac{|dz|}{|dy| + |dz|} \quad w_z = \frac{|dy|}{|dy| + |dz|} \quad . \quad (5.4)$$

Eine Veranschaulichung ist in Abb. 39 zu sehen.

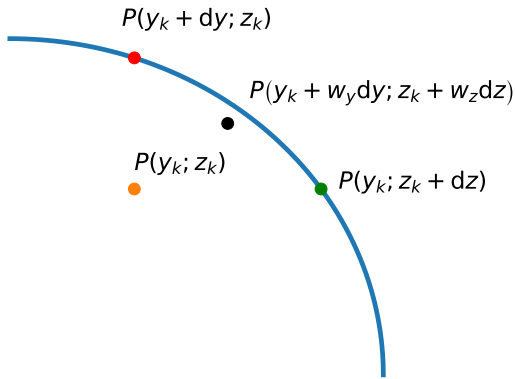
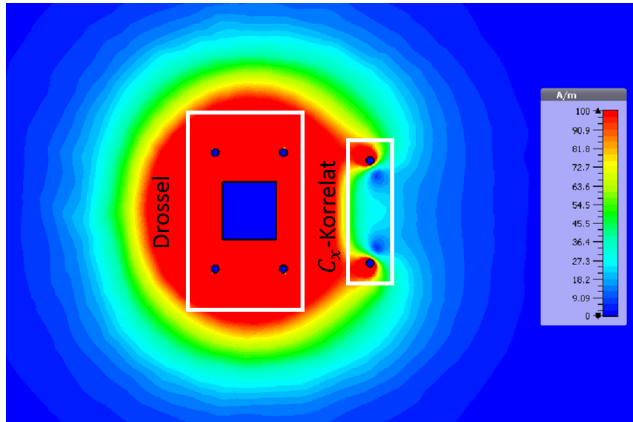


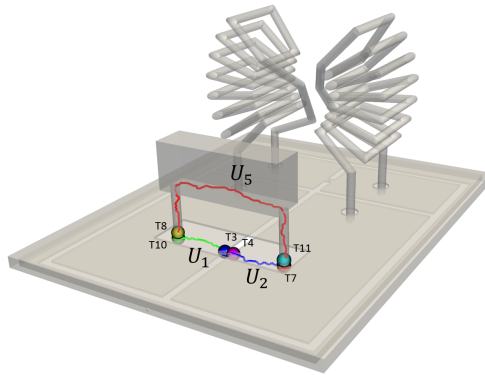
Abbildung 39: Skizze zur Bestimmung des approximativen Nullpunktes auf einer „Nulllinie“ aus der zueinander senkrechten Schrittweiten, berechnet aus dem 1D Newton-Verfahren.

- Wenn nur eine der beiden Schrittweiten im Gebiet Ω liegt, so gehe die volle Länge der im Gebiet liegenden Schrittweite.
- Falls keine der beiden Schrittweiten in dem Gebiet Ω liegen, breche ab.

Die Ergebnisse der Anwendung des vorgeschlagenen Verfahrens sind in Unterabschnitt 5.4 zu finden.



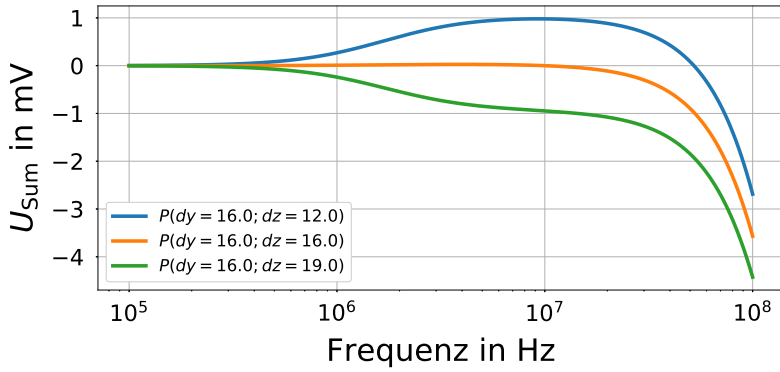
(a)



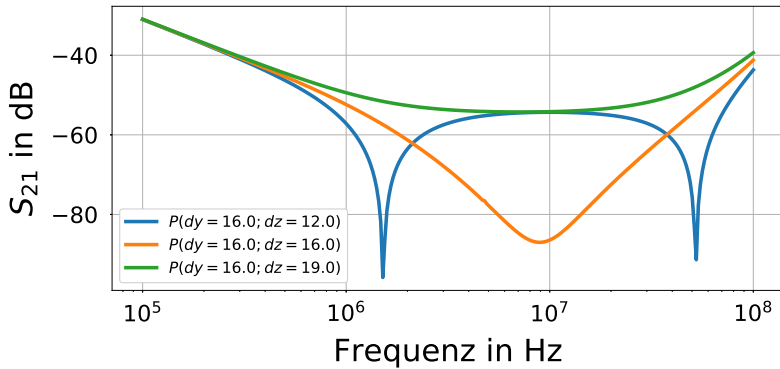
(b)

Abbildung 40: a) Schnitt durch das, mit CST MICROWAVE STUDIO[®] berechnete, magnetische Feld \mathbf{H} für den betrachteten Filter am „Cancellation Point“. Im unteren Bereich der Abbildung ist die Drossel und im oberen Bereich das C_x -Korrelat lokalisiert. Das durch die Gegentakströme der Gleichtaktdrossel erzeugte magnetische Streufeld kompensiert die Felder, welche durch die Ströme in der C_x -Schleife erzeugt werden.

b) Lokalisierung der Teilspannungen U_1 , U_2 und U_5 durch die C_x -Schleife im Modell. Am Cancellation Point findet eine Auslöschung dieser Teilspannungen statt.



(a)



(b)

Abbildungung 41:

- a) Summenspannung $U_{\text{Sum}} = U_1 + U_2 + U_5$ durch die C_x -Schleife aus Abb. 40b bei festem $y_k = 16 \text{ mm}$ bei den Abständen $z_k = [12 \text{ mm}, 16 \text{ mm}, 19 \text{ mm}]$. Am „Cancellation Punkt“ ($z_k = 16 \text{ mm}$) geht die Summenspannung bis ca. 20 MHz gegen Null.
- b) Netzwerkesimulationsergebnisse des S_{21} -Parameters für die extrahierten äquivalenten Ersatzschaltbilder bei festem $y_k = 16 \text{ mm}$ bei den Abständen $z_k = [12 \text{ mm}, 16 \text{ mm}, 19 \text{ mm}]$

5.3 Analyse und Diskussion mit Hilfe der Sensitivitätsanalyse

Die Koppelpfade zwischen parasitären Elementen zu identifizieren, welche zu unerwünschtem Verhalten von Bauteilen (z.B. Filtern) führen, kann ein Schlüssel zur Verbesserung der Störfestigkeit dieser Bauteile sein. Zum besseren Verständnis der Koppelpfade und deren Wirkzusammenhänge innerhalb des extrahierten Ersatzschaltbildes (EESB) werden die in den Abschnitten 3.1 bis 3.3 beschriebenen Sensitivitätsanalysen auf Netzwerkebene, die geometrische Sensitivitätsanalyse und die Kombination dieser Sensitivitäten (Sensitivität der QoIs) auf die Summenspannung U_{Sum} der C_x -Schleife angewendet. Zur Betrachtung dient das an einem CP extrahierte äquivalente Ersatzschaltbild mit der Positionierung $P(y_k = 16.0\text{ mm}; z_k = 16.0\text{ mm})$ des C_x -Korrelats, da hier die parasitären magnetischen Verkopplungen untersucht werden können, die letztlich zur InC führen.

Die Sensitivitätsanalyse auf Netzwerkebene liefert Netzwerksensitivitäten an 301 logarithmisch verteilten Frequenzpunkten (100 pro Dekade) im Bereich 100 kHz bis 100 MHz, indem die Ersatzschaltbildelemente variiert werden (siehe Unterabschnitt 3.2).

Um die Netzwerksensitivitäten der einzelnen Ersatzschaltbildelemente (unterschiedliche Einheiten!) miteinander vergleichen zu können, werden die berechneten Netzwerksensitivitäten entsprechend den Differenzenquotienten aus den Gleichungen (3.47) - (3.50) mit der Schrittweite multipliziert. Diese umnormierten Sensitivitäten entsprechen dann einer Netzwerksensitivität bezogen auf die Änderung der jeweiligen Elemente (R , L , C , k) um ε seiner Größe. Dies ermöglicht eine qualitative Aussage über die Wirkzusammenhänge der Ersatzschaltbildelemente; insbesondere auch über die Inductance Cancellation.

Im vorherigen Abschnitt wurde festgestellt, dass am CP die Summenspannung U_{Sum} im Bereich von ca. 5 MHz bis 20 MHz verschwindet und sich dadurch das Transmissionsverhalten des Filters verbessert. Aus diesem Grund werden die normierten Sensitivitäten über diesen Frequenzbereich gemittelt.

Die so berechneten normierten Netzwerksensitivitäten sind für die einzelnen Netzwerkelemente, dargestellt in Histogrammen, in den Abbildungen 42, 43 und 44 zu finden. Die normierte Netzwerksensitivität der Kapazitäten und der Widerstände (siehe Abb. 43) sind mit einem betragsmäßig maximalen Wert von ca. 8 nV im Verhältnis zu denen der Induktivitäten und dem Einfluss der Koppelfaktoren vernachlässigbar. Die normierte Netzwerksensitivität des Wi-

derstandes R_{8_11} ist mit ca. 0.5 nV im Verhältnis zu den anderen Widerständen groß, da dieser dem seriellen Widerstand des C_x -Korrelats entspricht (ESR). Die normierte Netzwerksensitivität der Induktivitäten L_{1_5} und L_{2_6} der Spulen der Gleichtaktdrossel und die Induktivität L_{8_11} des C_x -Korrelats (ESL) haben die betragsmäßig größten Werte mit ca. $3 - 4 \mu V$. Die größten Werte der normierten Netzwerksensitivität der Koppelfaktoren haben einen ca. doppelt so großen Einfluss auf die Summenspannung U_{Sum} als die normierte Netzwerksensitivität der Eigeninduktivitäten (siehe Abb. 44). Hier sind die betragsmäßig größten normierten Netzwerksensitivitäten bei den Koppelfaktoren zwischen den Induktivitäten der Spule und den Induktivitäten des C_x -Schleife (rot eingerahmt) und dem Koppelfaktor der beiden Induktivitäten der Spulen der Gleichtaktdrossel zu finden. Zusätzlich wurden die Netzwerksensitivitäten der Koppelfaktoren ihrer Größe nach in die Gruppen 1-4 eingeteilt.

Zur Demonstration der Einflüsse der Koppelfaktoren auf das Transmissionsverhalten wurden in den Netzwerksimulationen die einzelnen Gruppen nacheinander deaktiviert (siehe Abb. 42a). Deaktivieren der Gruppe 1 der Koppelfaktoren bewirkt eine zu vernachlässigende Änderung des Transmissionsverhaltens. Zusätzliches Deaktivieren der Gruppe 2 liefert eine deutliche Veränderung des Transmissionsverhaltens, was die maximale Dämpfung um ca. 20 dB reduziert. Das Deaktivieren von Gruppe 1 und 3 führt zu einer abweichenden Filtercharakteristik.

Wird die Größe der Werte der normierten Netzwerksensitivitäten der Koppelfaktoren (siehe ESB aus Abb. 37) mit ihrer Auswirkung auf das Transmissionsverhalten verknüpft, so kann beobachtet werden, dass auch kleine Koppelfaktoren einen großen Effekt auf das Transmissionsverhalten ausüben können. Die Netzwerksensitivität bietet somit nicht nur die Grundlage zur Berechnung der Sensitivitäten der QoIs, sondern auch die Möglichkeit diese auf den ersten Blick nicht intuitiven Zusammenhänge zu untersuchen.

Die Netzwerksensitivitäten der Spannungen U_{Sum} durch die C_x -Schleife lassen sich wie in Abschnitt 3.3 beschrieben mit den geometrischen Sensitivitäten zu den Sensitivitäten der QoIs kombinieren. Diese Sensitivität für die Summen-

spannung U_{Sum} bzgl. einer geometrischen Änderung p ergibt sich aus Gl. (3.5) wie folgt:

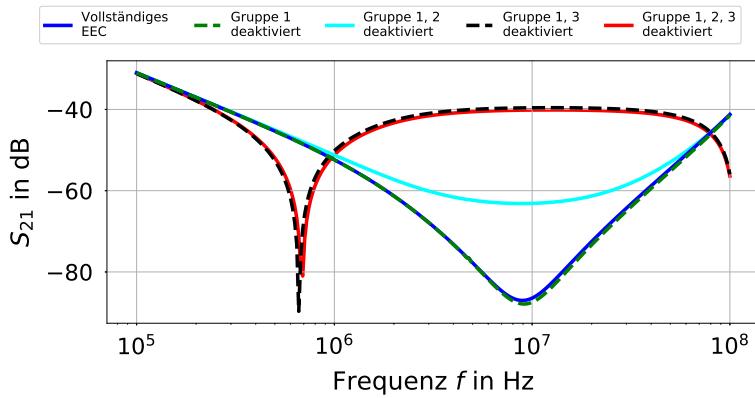
$$\begin{aligned} \frac{dU_{\text{Sum}}}{dp} = & \sum_{m=1}^{N_R} \frac{\partial U_{\text{Sum}}}{\partial R_m} \frac{dR_m}{dp} + \sum_{m=1}^{N_L} \frac{\partial U_{\text{Sum}}}{\partial L_m} \frac{dL_m}{dp} \\ & + \sum_{m=1}^{N_C} \frac{\partial U_{\text{Sum}}}{\partial C_m} \frac{dC_m}{dp} + \sum_{m=1}^{N_K} \frac{\partial U_{\text{Sum}}}{\partial k_m} \frac{dk_m}{dp} . \end{aligned} \quad (5.5)$$

Da die Berechnung über die Aufsummierung der Sensitivitäten der einzelnen Elemente erfolgt, geht bei der Kombination der Netzwerksensitivitäten mit den geometrischen Sensitivitäten keinesfalls die Interpretierbarkeit verloren.

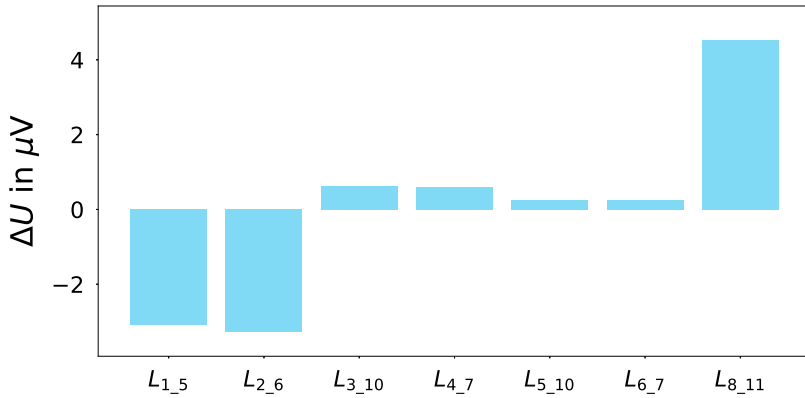
Die für die einzelnen Elemente berechneten Sensitivitäten der QoIs sind in den Abbildungen 45 und 46 bzgl. der Verschiebung in z -Richtung über der Frequenz dargestellt. Hier ist zu sehen, dass die durch die Verschiebung geänderten kapazitiven und resistiven Elemente des EESB im Vergleich zu den induktiven Elementen und deren Koppelfaktoren kaum eine Änderung der Summenspannung hervorrufen. Bei den Eigeninduktivitäten bewirkt die durch die Verschiebung hervorgerufene Änderung der ESL eine Änderung der Spannung von ca. $1\mu\text{V}/\text{mm}$, die jedoch im Verhältnis zu den maximalen Sensitivitäten der Koppelfaktoren um ca. den Faktor 100 geringer ist. Bei den in Abb. 46b dargestellten Sensitivitäten der Spannungen bzgl. der Koppelfaktoren wurden alle Kurven ignoriert, deren maximaler Betrag an den jeweiligen Frequenzpunkten unterhalb von $0.9\mu\text{V}/\text{mm}$ lag. Mit einem maximalen Betrag von ca. $125\mu\text{V}/\text{mm}$ sind die größten Sensitivitäten durch die Kopplungen zwischen der ESL und den Spulen der Drossel gegeben.

Obwohl die Netzwerksensitivität des Koppelfaktors zwischen den Induktivitäten der Spulen einen, im Verhältnis zu den anderen Koppelfaktoren, nicht vernachlässigbaren Wert einnimmt, fehlt in der Abbildung 46b diese Sensitivität, da ihr maximaler Wert unterhalb von $900\text{nV}/\text{mm}$ liegt. Obwohl die Netzwerksensitivität ein Änderungspotential für die Summenspannung voraussagt, ist die gewählte geometrische Veränderung nicht in der Lage dieses Potential zu erreichen.

Dies kann unter Umständen auch eine wertvolle Information sein, da z.B. eine spezifische Änderung eines Gehäuses gar nicht die Möglichkeit bietet, EMV-relevante Zielgrößen zu optimieren.



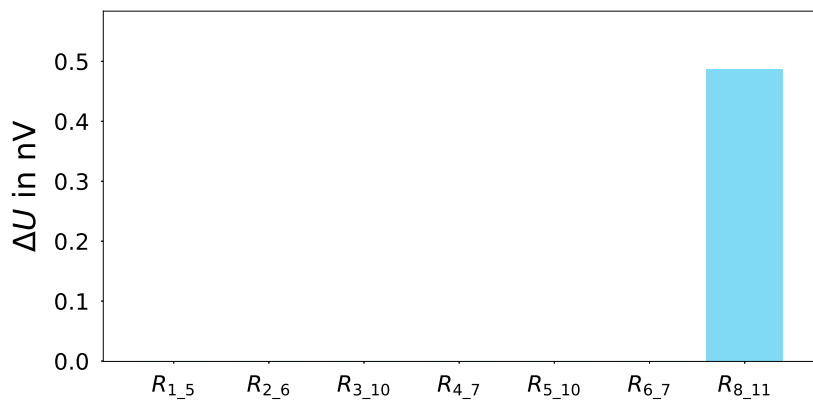
(a)



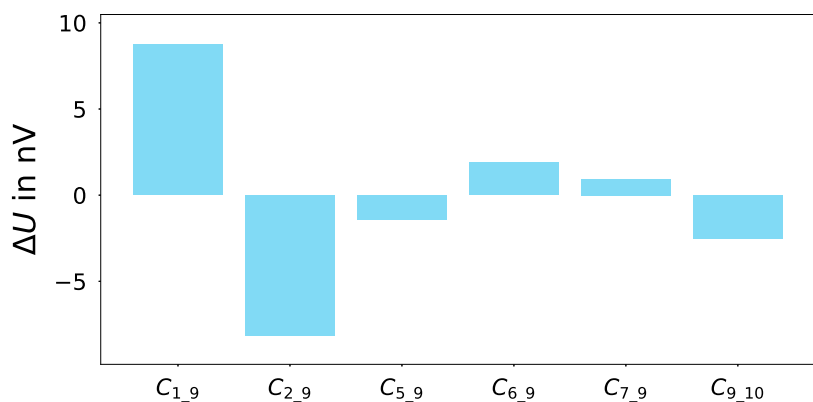
(b)

Abbildung 42: a) Netzwerksimulationsergebnisse des S_{21} -Parameters des EESBs am Punkt P (16.0mm; 16.0mm). In der Netzwerksimulation wurden Gruppen von Koppelfaktoren deaktiviert, definiert durch die Einteilung aus Abb. 44.

b) Normierte Sensitivität der Summenspannung U_{sum} auf Netzwerkebene (Netzwerksensitivität) bei der Änderung der jeweiligen Induktivität um ein zehntausendstel ($\varepsilon = 1e^{-4}$) ihrer Größe.



(a)



(b)

Abbildung 43: Normierte Sensitivität der Summenspannung U_{sum} auf Netzwerkebene (Netzwerksensitivität) bei der Änderung des jeweiligen Netzwerkelementes um ein zehntausendstel ($\varepsilon = 1e^{-4}$) seiner Größe.

a) Netzwerksensitivität für die Widerstände R aus dem EESB aus Abb. 37.

b) Netzwerksensitivität für die Kapazitäten C aus dem EESB aus Abb. 37.

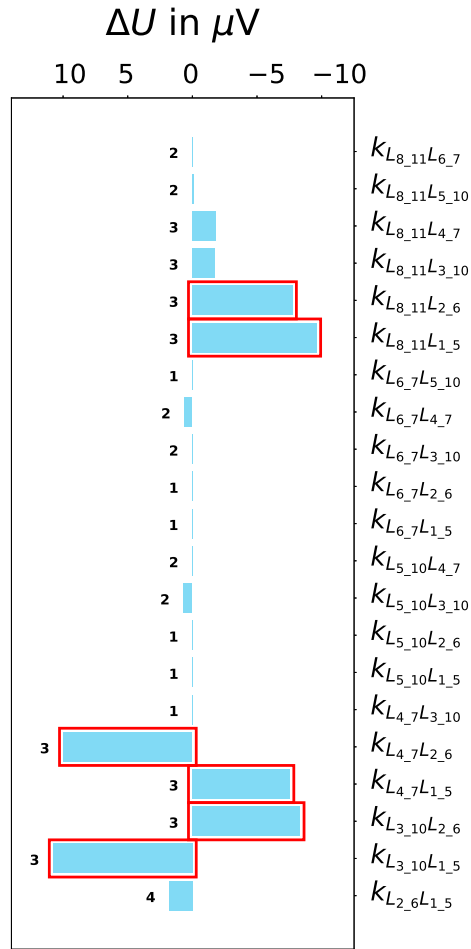
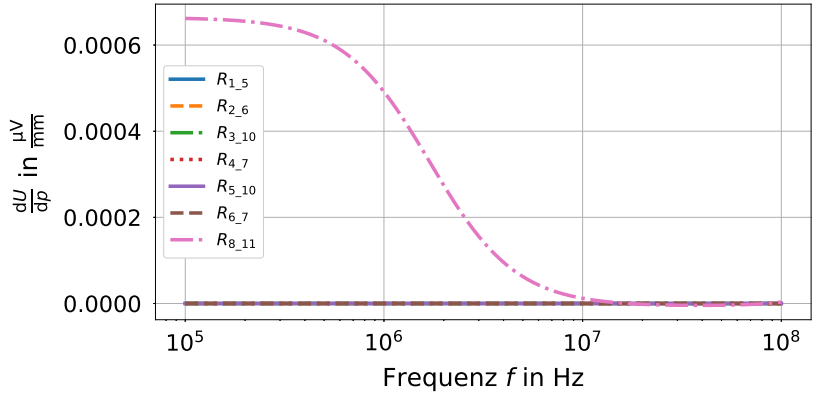
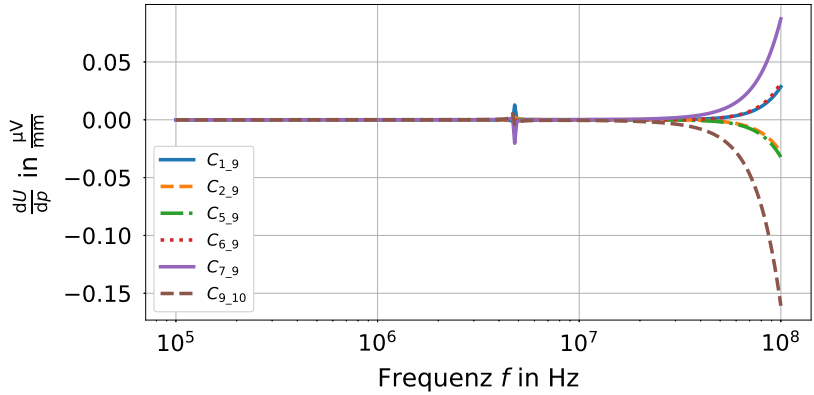


Abbildung 44: Normierte Sensitivität der Summenspannung U_{sum} auf Netzwerkebene (Netzwerksensitivität) bei der Änderung des jeweiligen Koppelfaktors um ein zehntausendstel ($\varepsilon = 1e^{-4}$) seiner Größe. Die Zahlen über den Balken teilen die Koppelfaktoren in die Gruppen 1-4 ein. Rot markiert sind Koppelfaktoren, welche an einer Interaktion zwischen C_x -Schleife und der Drossel beteiligt sind.



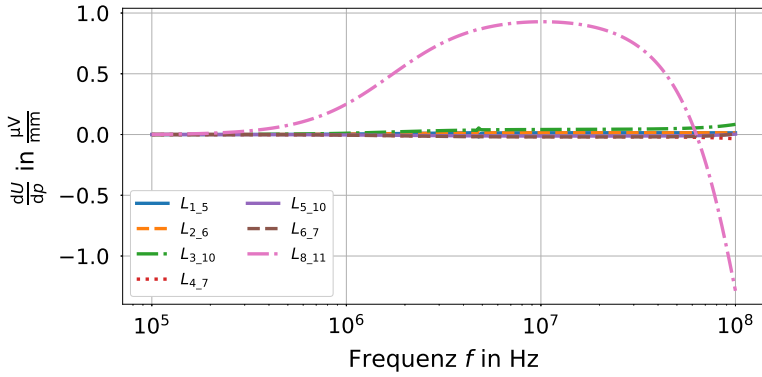
(a)



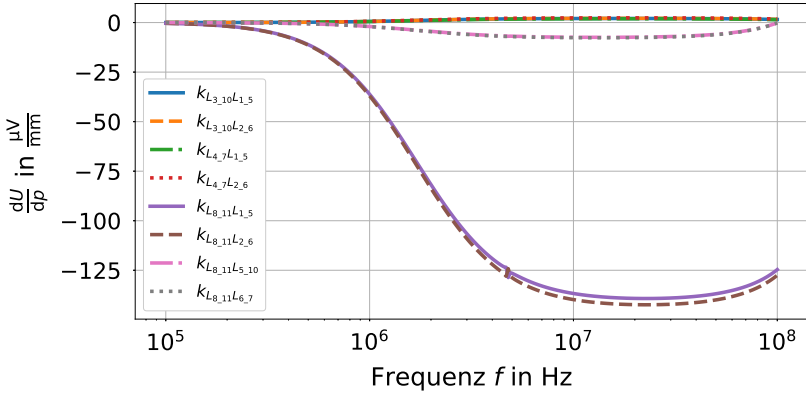
(b)

Abbildung 45: Sensitivität der QoIs der Summenspannung U_{Sum} bzgl. einer Verschiebung in z -Richtung des C_x -Korrelats.

- a) Widerstände R .
- b) Kapazitäten C .



(a)



(b)

Abbildung 46: Sensitivität der QoIs der Summenspannung U_{sum} bzgl. einer Verschiebung in z Richtung des C_x -Elementes für die einzelnen Koppelfaktoren des extrahierten ESB aus Abb. 37.

a) Induktivitäten L_{ij} .

b) Koppelfaktoren k_{ij} .

5.4 Diskussion der Simulationsergebnisse

Wie in den letzten Unterabschnitten festgestellt wurde, steht die Position des C_x -Korrelats in der y - z -Ebene in einem direkten Zusammenhang zum Transmissionsverhalten in einem gewissen Frequenzbereich des Filters. Die Extraktion und die Bestimmung der Sensitivitäten der QoIs bei festem $y_k = 16.0\text{ mm}$ wird für Abstände in z -Richtung im Bereich $\Omega_{z_k} = [12\text{ mm}, 12.1\text{ mm}, \dots, 19.1\text{ mm}]$ durchgeführt um diese Abhängigkeit weiter zu untersuchen. Die dabei betrachteten Größen des Modells sind die Summe der Teilspannungen U_{sum} (Abb. 40b), der S_{21} -Parameter und deren Sensitivitäten. Die Simulationssoftware CST MICROWAVE STUDIO[®] bietet die Möglichkeit die S_{21} -Parameter und deren Sensitivitäten zu vergleichen. Zusätzlich soll der CP, mittels der Spannung U_{sum} und deren Gradienten bzgl. y - und z -Richtung, gefunden werden (siehe Abschnitt 5.2).

Der S_{21} Parameter wurde bei Abständen im Bereich Ω_{z_k} am Frequenzpunkt 10MHz durch die in Abschnitt 2 beschriebenen Verfahren und zusätzlich zum Vergleich mit MWS bestimmt (Abb. 47a). Die Ergebnisse zeigen eine Übereinstimmung, jedoch ist der Abstand der maximalen Dämpfung um ca. 0.1 mm verschoben. Bei CST MWS werden die vollen Maxwellgleichungen gelöst und dadurch sind zusätzliche Effekte in den Ergebnissen abgebildet, welche im extrahierten Ersatzschaltbild nicht wiedergegeben werden können. Ausgehend von dem betrachteten S_{21} -Parameter hat der Cancellation Point die Koordinaten $P(y_k = 16.0\text{ mm}, z_k = 16.0\text{ mm})$. In Abb. 47b ist der S_{21} -Parameterverlauf für eine Position vor dem Cancellation Punkt, am Cancellation Punkt und nach dem Cancellation Punkt über der Frequenz dargestellt. Diese zeigen eine Übereinstimmung, weichen jedoch mit steigender Frequenz leicht ab. Dies kann auf die EPCs der Spulen der Gleichtaktdrossel zurückgeführt werden, welche aus der separierten Drossel ermittelt und als konstant approximiert wurden (siehe Unterabschnitt 5.1).

Zusätzlich wurde die Sensitivität des Real- und Imaginärteils des S_{21} -Parameters bzgl. einer Verschiebung des C_x -Korrelats in z -Richtung für verschiedene Abstände im Bereich $\Omega_{z_k} = [12\text{ mm}, 12.1\text{ mm}, \dots, 19.1\text{ mm}]$ bei 10MHz ermittelt (Abb. 48). Diese zeigen einen gleichen Kurvenverlauf wie die Lösung von MWS, enthalten jedoch einen Offset. Durch Vergleiche der S_{21} -Parameter bei verschiedenen Abständen, kann dies auf die fehlende Sensitivität

der EPCs zurückgeführt werden. Für die Abstände $z_k = 12.0\text{ mm}$, $z_k = 16.0\text{ mm}$ und $z_k = 19.0\text{ mm}$ ist der Vergleich von Real- und Imaginärteil im Frequenzbereich von $f = [0.1\text{ MHz}, \dots, 100\text{ MHz}]$ in Abb. 49 dargestellt. Auch hier ist, abgesehen vom Offset, das gleiche Kurvenverhalten der beiden Lösungen zu beobachten.

In Abb. 50a ist die Summenspannung U durch die C_x -Schleife bei 10 MHz für die Abstände im Bereich $\Omega_{z_k} = [12\text{ mm}, 12.1\text{ mm}, \dots, 19.1\text{ mm}]$ dargestellt. Deutlich ist ein Nulldurchgang bei $z_k = 16\text{ mm}$ zu sehen, was dem Cancellation Point entspricht und die Beobachtungen aus dem S_{21} -Parameter bestätigt. In Abb. 50b ist die Spannung durch die C_x -Schleife für 3 Positionen über der Frequenz dargestellt, welche eine positive Summenspannung U_{sum} vor dem CP, eine breitbandige Nullsumme am CP und eine negative Spannung nach dem CP zeigt. Hier soll wieder auf den Zusammenhang zwischen der Auslöschung der Summenspannung und dem Transmissionsverhalten aus Abb. 47b hingewiesen werden.

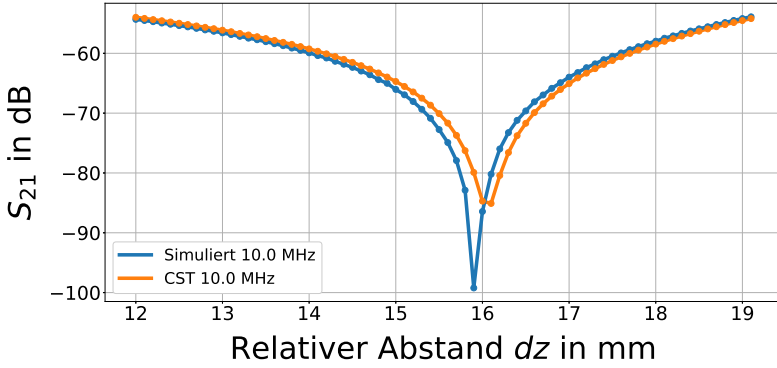
Nun werden die Summenspannung U_{sum} und deren Sensitivitäten bzgl. der y - und z -Richtung am Frequenzpunkt 10MHz genutzt um, wie in Abschnitt 5.2 beschrieben, den Cancellation Point zu finden. Die Wahl eines einzelnen Frequenzpunktes erleichtert die Demonstration, könnte im Prinzip aber auch über einen Frequenzbereich, in welcher die Cancellation stattfindet, durchgeführt werden. Dies ist möglich, da die Sensitivitäten der QoIs durch ihre effiziente Berechnung im gewählten Frequenzbereich zu Verfügung stehen.

Bei der Bestimmung des CP wurden 2 willkürliche Startpositionen in dem Gebiet $\Omega_{y_k z_k} = [12\text{ mm}, 22\text{ mm}] \times [14\text{ mm}, 18\text{ mm}]$ in der y - z Ebene gewählt mit den folgenden Ergebnissen: Wie an den Ergebnissen zu sehen ist, werden

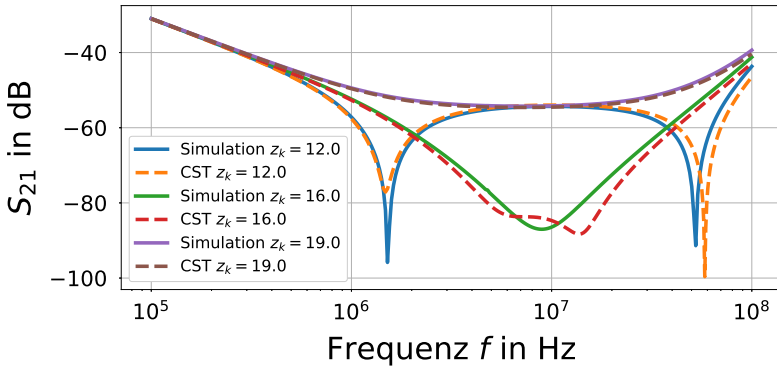
Durchlauf	Startpunkt	Zielpunkt	U_{sum}	Iterationen
1	$P(20.00\text{ mm}, 14.20\text{ mm})$	$P(20.13\text{ mm}, 16.24\text{ mm})$	$2.51\mu\text{V}$	5
2	$P(16.00\text{ mm}, 14.60\text{ mm})$	$P(16.07\text{ mm}, 16.00\text{ mm})$	$-0.69\mu\text{V}$	4

bei unterschiedlichen Startpunkten, unterschiedliche Cancellation Points gefunden. Um diese Beobachtung aufzuklären, wird ein „Parameterlauf“ durchgeführt, welcher mit deutlichem Mehraufwand verbunden ist und hier nur zu Demonstrationszwecken durchgeführt wird.

Die Durchführung des Parameterlaufs erfolgte im Gebiet $\Omega_{y_k z_k}$ mit äquidistanten Abständen $dy = 1.0\text{ mm}$ und $dz = 0.2\text{ mm}$. Werden für die darin liegenden 200 Messpunkte die Extraktion und die Berechnung der Sensitivitäten durchgeführt, so ergibt sich die in Abb. 52 dargestellten Contourplots der Summenspannung in der y - z Ebene und dessen Sensitivitäten bzgl. der y - und z -Richtung. Hier ist zu sehen, dass es nicht nur einen Cancellation Point gibt, sondern eine komplette „Cancellation Linie“, in welcher die Summenspannung durch die C_x -Schleife verschwindet. Dies erklärt auch die bei der Optimierung gefundenen unterschiedlichen Zielpunkte bei unterschiedlichen Startpunkten. Zusätzlich dargestellt sind noch der topologische Verlauf der Optimierungen.



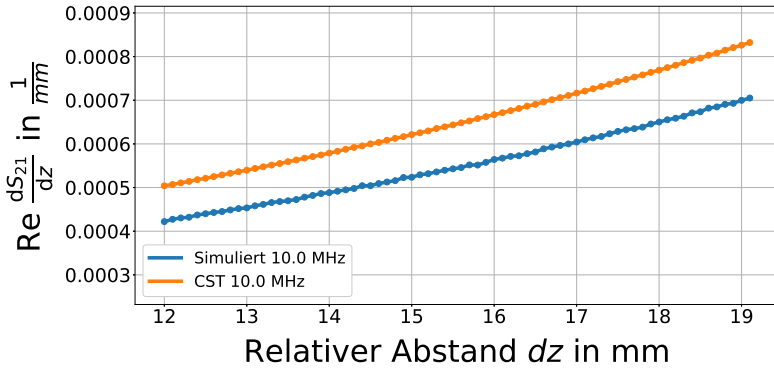
(a)



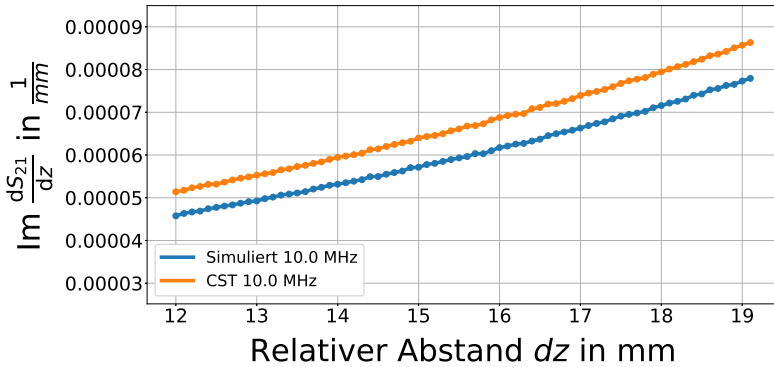
(b)

Abbildung 47: a) S_{21} -Parameter bei 10 MHz bei verschiedenen Abständen z_k im Bereich von $\Omega_{z_k} = [12 \text{ mm}, 12.1 \text{ mm}, \dots, 19.1 \text{ mm}]$; simulierte Werte (blau); Referenzrechnung mit CST MICROWAVE STUDIO® (orange).

b) S_{21} -Parameter über der Frequenz bei Abständen links des CPs ($z_k = 12 \text{ mm}$), am CP ($z_k = 16 \text{ mm}$) und rechts des CPs ($z_k = 19 \text{ mm}$).



(a)

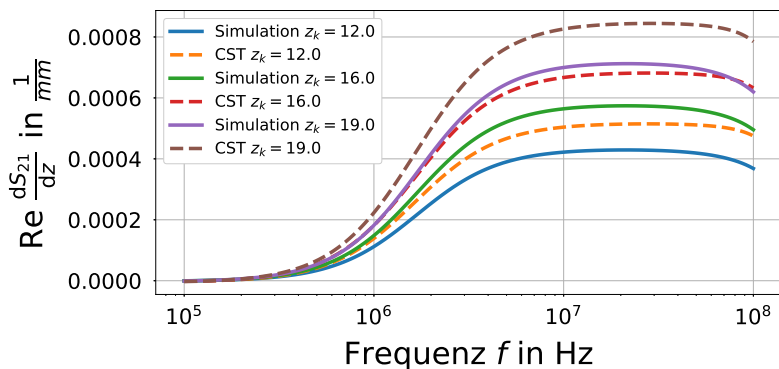


(b)

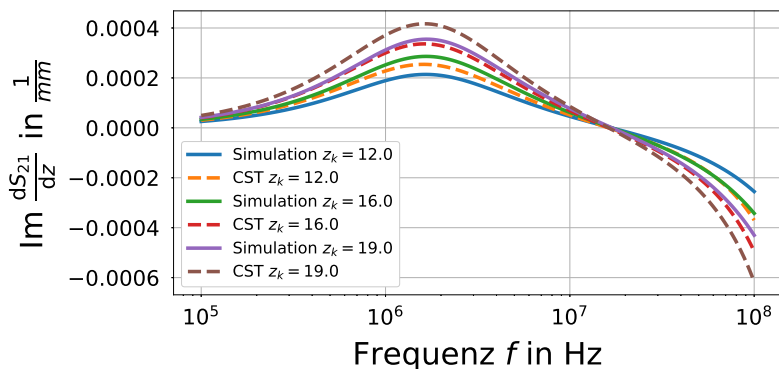
Abbildung 48: Sensitivität des S_{21} -Parameter bzgl. einer Verschiebung des C_x -Korrelats in z -Richtung bei 10 MHz bei verschiedenen Abständen z_k im Bereich von $\Omega_{z_k} = [12 \text{ mm}, 12.1 \text{ mm}, \dots, 19.1 \text{ mm}]$; simulierte Werte (blau); Referenzrechnung mit CST MICRO-WAVE STUDIO[®] (orange).

a) Realteil

b) Imaginärteil



(a)

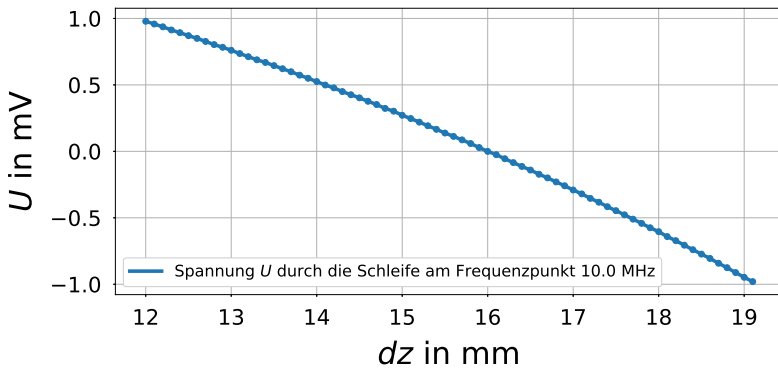


(b)

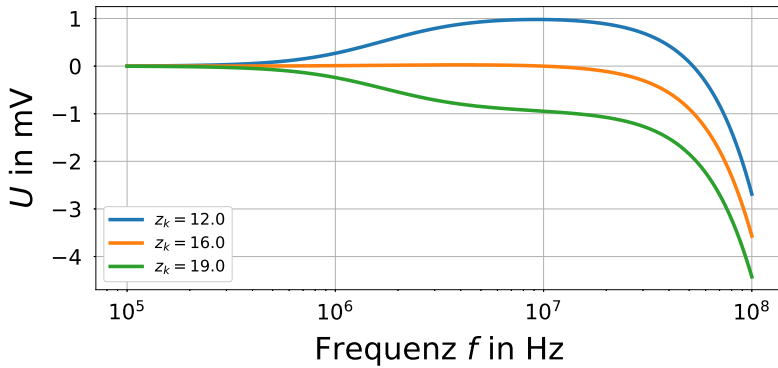
Abbildung 49: Sensitivität des S_{21} -Parameter bzgl. einer Verschiebung des C_x -Korrelats in z -Richtung über der Frequenz bei Abständen vor dem Cancellation Point ($z_k = 12\text{ mm}$), am CP ($z_k = 16\text{ mm}$) und nach dem CP ($z_k = 19\text{ mm}$); Simulierte Werte (durchgezogene Kurven); Referenzrechnung mit CST MICROWAVE STUDIO® (strichlierte Kurven)

a) Realteil

b) Imaginärteil



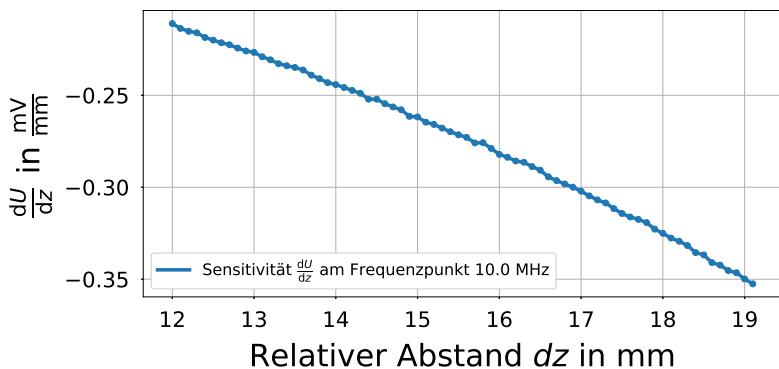
(a)



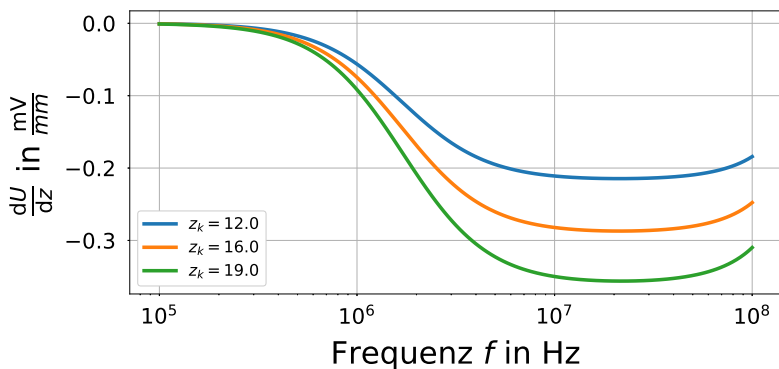
(b)

Abbildung 50: a) Summenspannung U_{Sum} durch die C_x -Schleife aus Abb. 40b bei 10 MHz bei verschiedenen Abständen z_k im Bereich von $\Omega_{z_k} = [12 \text{ mm}, 12.1 \text{ mm}, \dots, 19.1 \text{ mm}]$.

b) Summenspannung U_{Sum} durch die C_x -Schleife aus Abb. 40b über der Frequenz bei Abständen vor dem Cancellation Point ($z_k = 12 \text{ mm}$), am CP ($z_k = 16 \text{ mm}$) und nach dem CP ($z_k = 19 \text{ mm}$).



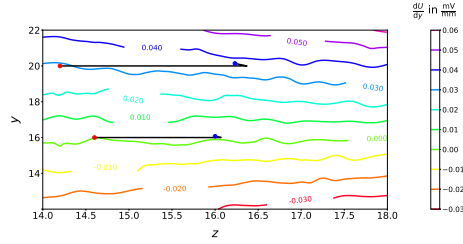
(a)



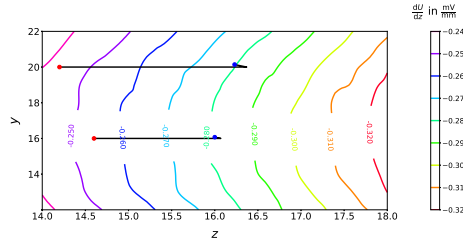
(b)

Abbildung 51: a) Sensitivität der Summenspannung U_{Sum} durch die C_x -Schleife aus Abb. 40b bzgl. einer Verschiebung in der z -Richtung bei 10MHz für verschiedene Abständen z_k im Bereich von $\Omega_{z_k} = [12\text{mm}, 12.1\text{mm}, \dots, 19.1\text{mm}]$.

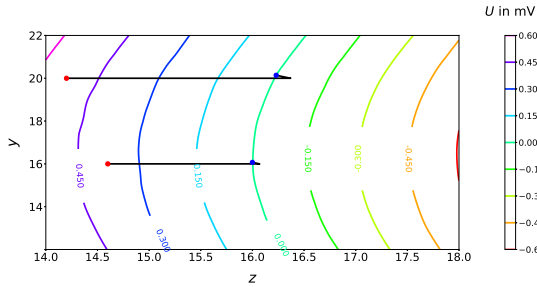
b) Sensitivität der Summenspannung U_{Sum} durch die C_x -Schleife aus Abb. 40b bzgl. einer Verschiebung in der z -Richtung über der Frequenz bei Abständen vor dem Cancellation Point ($z_k = 12\text{mm}$), am CP ($z_k = 16\text{mm}$) und nach dem CP ($z_k = 19\text{mm}$).



(a)



(b)



(c)

Abbildung 52: a) Sensitivität der Summenspannung U_{sum} durch die C_x -Schleife aus Abb. 40b bzgl. einer Verschiebung in der y -Richtung im Gebiet $\Omega_{y_k z_k} = [12 \text{ mm}, 22 \text{ mm}] \times [14 \text{ mm}, 18 \text{ mm}]$ bei 10 MHz. b) Sensitivität der Summenspannung U_{sum} durch die C_x -Schleife aus Abb. 40b bzgl. einer Verschiebung in der z -Richtung im Gebiet $\Omega_{y_k z_k}$ bei 10 MHz. c) Summenspannung U_{sum} durch die C_x -Schleife aus Abb. 40b im Gebiet $\Omega_{y_k z_k}$ bei 10 MHz. Zusätzlich eingezeichnet, die Topologie der Optimierung.

5.5 Adjungiertes Verfahren

Eine mögliche Anwendung zur Nutzung einer großen Anzahl dieser Sensitivitäten kann eine Freiformoptimierung bzgl. EMV-relevanter Größen sein. Hierzu soll die aktuelle Performanz des implementierten Verfahrens mit der Berechnung der Sensitivitäten über einen Differenzenquotienten verglichen werden. Dazu wird das Beispiel des betrachteten Filters verwendet. Die Gitteranzahl wurde auf ca. 86000 reduziert mit 15522 Oberflächendreiecken auf den leitenden Strukturen. Alle Rechnungen wurden auf einem Simulationsrechner mit 2 Intel Xeon(R) E5-2697v3 mit 256GB Arbeitsspeicher durchgeführt. Die ermittelten Zeiten unterliegen Schwankungen (Messfehler), welche mit der Auslastung des Gesamtsystems und des Betriebssystems zu begründen sind.

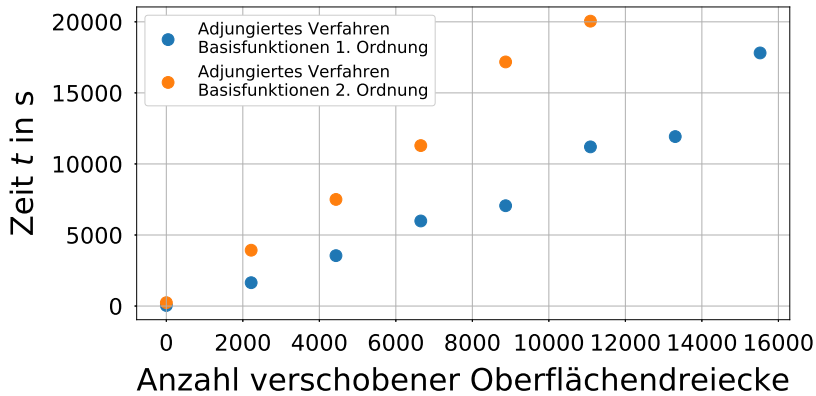
In den numerischen Experimenten wurden für Basisfunktionen erster und zweiter Ordnung jeweils 1, 2218, 4335, 6652, 8870, 11087, 13304, 15522 Oberflächendreiecke bzgl. ihrer Flächennormalen verschoben und die daraus resultierenden geometrischen Sensitivitäten für jedes verschobene Oberflächendreieck mittels des adjungierten Verfahrens berechnet.

Hierbei wurde die totale Berechnungszeit erfasst und in Abb. 53a dargestellt. Hier kann deutlich ein linearer Zusammenhang zwischen Anzahl verschobener Oberflächendreiecke und der Berechnungszeit beobachtet werden. Mit steigender Anzahl der zu verschiebenden Oberflächendreiecke besteht der Großteil der Berechnungszeit aus der Assemblierung der Gradienten der Operatoren und der Matrixmultiplikation bei der Ausführung der adjungierten Gleichung aus Gl. (3.36).

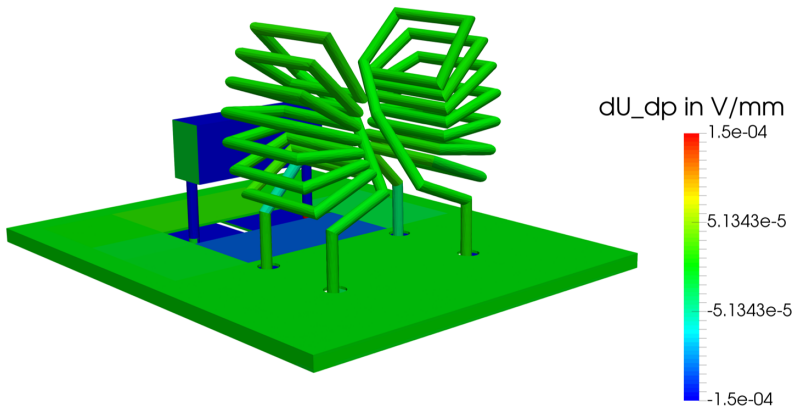
Zum Vergleich dauert eine reine Extraktion für Basisfunktionen erster Ordnung ca. 33s und eine reine Extraktion für Basisfunktionen zweiter Ordnung ca. 185s. Eine Verschiebung von 15522 Oberflächen würde bei einer Berechnung über die finite Differenzen, rein hypothetisch, eine Gesamtrechendauer von 512226s und 2871570s bedeuten.

Die so gewonnenen Sensitivitäten können auch genutzt werden, um sog. Sensitivitätskarten zu erzeugen. Hier werden die Oberflächen in gewisse Bereiche unterteilt, welche bzgl. ihrer Flächennormalen verschoben werden. Diese Oberflächen werden, je nach Größe der bei der Verschiebung auftretenden Sensitivität, mittels einer Farbskala eingefärbt. Diese Sensitivitätskarten sind eine Hilfe bei der Identifikation von sensitiven Geometriebereichen bzgl. einer Zielgröße.

Dies kann z.B. wie in Abbildung 53b dargestellt für die Summenspannung durch die C_x -Schleife (nur induktive Anteile) durchgeführt werden. Hier sieht man deutlich, dass nur durch eine Veränderung der C_x -Schleife, eine Änderung der Summenspannung hervorgerufen werden kann.



(a)



(b)

Abbildung 53: a) Berechnungszeit für die Extraktion und die Berechnung der Sensitivitäten über der Anzahl der verschobenen Oberflächendreiecke.
 b) Sensitivitätskarte bzgl. der Summenspannung durch die C_x -Schleife (nur induktive Anteile) bzgl. einer Verschiebung der Oberflächen bzgl. ihrer Flächennormalen. Diese Oberflächen wurden, je nach Größe der bei der Verschiebung auftretenden Sensitivität, mittels einer Farbskala eingefärbt.

6 Schlussfassung und Ausblick

In diesem Kapitel finden sich eine Zusammenfassung der Arbeit und die aus der Arbeit gefolgerten Beschlüsse. Im Ausblick werden daraus hervorgehende wissenschaftliche Fragestellungen für mögliche neue Forschungen genannt.

6.1 Zusammenfassung

Diese Arbeit befasst sich mit der Entwicklung einer Sensitivitätsanalyse in Zusammenhang mit einem Extraktionsverfahren, welches Feldmodelle auf Ersatzschaltbilder mit vorgegebener Topologie abbildet. Eine Beschreibung des Extraktionsverfahrens findet sich in Kapitel 2. Hier werden Feldlösungen verwendet, um ein äquivalentes Ersatzschaltbild aus einer 3D-Geometrie zu extrahieren, welches aus Widerständen, Kapazitäten und partiellen Induktivitäten besteht. Das so extrahierte Ersatzschaltbild ist eine Erweiterung des vom Ingenieur vorgeschlagenen funktionellen Ersatzschaltbilds, behält die geometrische Interpretierbarkeit und lässt sich mit einer äußeren Beschaltung kombinieren. Das extrahierte Ersatzschaltbild ist jedoch in der Lage, das parasitäre Verhalten, das im funktionellen Ersatzschaltbild vernachlässigt wurde, aber im Feldmodell berücksichtigt wird, korrekt wiederzugeben. Dadurch wird dem Ingenieur schon früh im Entwurfsprozess die Möglichkeit gegeben, den parasitären Effekten Rechnung zu tragen. Der gültige Frequenzbereich wird durch die im Feldmodell verwendeten statischen und Darwin'schen Näherungen bestimmt. In Kapitel 3 wird eine Sensitivitätsanalyse für das in Kapitel 2 beschriebene Extraktionsverfahren eingeführt. Dies beinhaltet die Berechnung der Sensitivitäten der QoIs bzgl. der Netzwerkelemente (Netzwerksensitivitäten), die Berechnung der Sensitivitäten der Netzwerkelemente bzgl. der Änderung von Geometrieparametern (Geometrische Sensitivitäten) und die Sensitivitäten der QoIs bzgl. der Änderung von Geometrieparametern (Sensitivitäten der QoIs). Die Berechnung erfolgt bei den Netzwerksensitivitäten mit der Methode der finiten Differenzen und bei den geometrischen Sensitivitäten mit dem adjungierten Verfahren. Das Ergebnis ist eine Sensitivitätsanalyse, die Wirkmechanismen identifiziert und effizient eine große Anzahl von Sensitivitäten (Gradienten) bereitstellt.

In Kapitel 4 werden die in Kapitel 2 und Kapitel 3 beschriebenen Verfahren an überprüfbaren Beispielen für Widerstände, Kapazitäten und partiellen Induktivitäten getestet. Die Ergebnisse für die extrahierten Netzwerkelemente und

deren Sensitivitäten zeigen eine Übereinstimmung mit den analytisch erwarteten Größen mit der zu erwartenden Genauigkeit.

In Kapitel 5 wird die Sensitivitätsanalyse auf Netzwerkebene genutzt, um die Wirkmechanismen der Inductance Cancellation in einem EMI-Filter zu identifizieren. Bei diesem Effekt führt die Auslöschung der Summenströme in der C_X -Schleife eines Kondensators zu einer Verbesserung der Gegentaktdämpfung. Die Sensitivitäten der QoIs werden verwendet, um mit Hilfe des Newtonverfahrens ein spezifisches Layout zu finden, bei welchem sich dieser Effekt einstellt. Die Gegentaktdämpfung des Filters wird durch diese Optimierung breitbandig um bis zu 20 dB verbessert.

6.2 Beschlüsse

Die parasitären Ersatzschaltbildparameter sind Widerstände, Kapazitäten und partielle Induktivitäten. Die Sensitivitäten dieser Elemente bzgl. Geometrie- und Materialparametern können aus einem hoch genauen Feldmodell berechnet werden. Weiter können Sensitivitäten von charakteristischen Größen eines elektronischen Gerätes, den sog. QoIs, berechnet werden. Da für die Berechnung das adjungierte Verfahren verwendet wurde, kann eine Studie bzgl. einer großen Anzahl von Geometrie- und Materialparametern des 3D-Modells numerisch effizient durchgeführt werden. Die so berechneten Sensitivitäten behalten den Charakter der geometrischen Interpretierbarkeit und sind, im Vergleich zu der Berechnung über das Verfahren der finiten Differenzen, hoch genau.

6.3 Ausblick

Durch die numerisch effiziente Berechnung mit dem adjungierten Verfahren stehen eine Großzahl von genauen Sensitivitäten (Gradienten) zur Verfügung. Diese können verwendet werden, um eine Freiformoptimierung von elektrischen Geräten bzgl. EMV-relevanter Zielgrößen durchzuführen. Ein weiteres Gebiet für die Verwendung der Sensitivitäten kann die Unsicherheitsquantifizierung sein.

Durch eine Erhöhung der Anzahl der Freiheitsgrade im Feldmodell erhöht sich die Größe der zu lösenden Gleichungssysteme. Dann könnten iterative Lösungsverfahren die bessere Wahl sein. Jedoch erhöht sich auch die Konditionszahl der Matrizen. Deshalb sollten auf das Gleichungssystem angepasste Vorkonditionierer entwickelt werden. Auch eine sinkende Frequenz erhöht ebenfalls die

Konditionszahl. Eine mögliche Lösung kann eine niederfrequente Stabilisierung für das verwendete Gleichungssystem sein, welche schon erfolgreich auf die vollen Maxwellgleichungen angewendet wurde [39]. Die zu erwartende Genauigkeit der extrahierten partiellen Induktivitäten und deren Sensitivitäten verringert sich aus den genannten Gründen.

Abkürzungsverzeichnis

\mathcal{A}	FE Operator; variabel
\mathcal{G}	FE Gradienten Operator
\mathcal{L}	FE Laplace Operator
\mathcal{L}^ε	FE Laplace Operator; ε enthalten
\mathcal{L}^σ	FE Laplace Operator; σ enthalten
\mathcal{S}	FE ‘Skalare-Massenmatrix’ Operator
S	FE Teiloperator
T	FE Teiloperator
ε	Dielektrische Leitfähigkeit (Permittivität)
ε_0	Elektrische Feldkonstante
ε_r	Stoffspezifische relative Permittivität
μ_0	Magnetische Feldkonstante
μ	Magnetische Leitfähigkeit (Permeabilität)
ρ_s	Spezifischer Widerstand
σ	Elektrische Leitfähigkeit (Konduktivität)

O	Zusammenfassen der Elemente R, L, C, k zu einer Gruppe
A_L	Inzidenzmatrix der induktiven Elemente
C	Matrix; Komponenten entsprechen den Kapazitäten entlang der Kanten der Topologie
L	Matrix; Komponenten entsprechen den Induktivitäten entlang der Kanten der Topologie
Y	Addmitanzmatrix
Y_{ESB}	Admittanzmatrix im Ersatzschaltbild
Z	Impedanzmatrix
A	Inzidenzmatrix
C	Kapazität
G	Leitwert
I	Strom
k	Koppelfaktor
L	Induktivität
L_{ii}	Eigeninduktivität
L_{ij}	Gegeninduktivität
M	Gegeninduktivität

Q	Quantities of Interest
R	Ohm'scher Widerstand
U	Spannung
U_{Sum}	Summenspannung innerhalb der C_x -Schleife
U_C	Am Kondensator C entstehende Potentialdifferenz
U_{ind}	Induzierte Spannung
Z	Impedanz
Z_{3D}	Impedanz einer 3D Struktur
DC	Direct Current
EESB	Extrahiertes Äquivalentes Ersatzschaltbild
EPC	Equivalent Parallel Capacitance
ESL	Equivalent Serial Inductance
ESR	Equivalent Serial Resistance
ρ	Ladungsdichte
φ	Elektrisches Potential
g	Hilfsfeld zur Berechnung des Anteiles der Stromanregung

A	Magnetisches Vektorpotential
A_σ	Anteil des Vektorpotentials der leitenden Struktur
A_s	Anteil des Vektorpotentials der Stromanregung
B	Magnetische Flussdichte
D	Elektrische Flussdichte
E	Elektrische Feldstärke
E_D	Divergenzbehafteter Anteil des elektrischen Feldes
E_W	Wirbelbehafteter Anteil des elektrischen Feldes
H	Magnetische Feldstärke
j_σ	Anteil der Stromdichte der leitenden Struktur
j_s	Anteil der Stromdichte der Stromanregung
j	Stromdichte
λ	Adjungierte Lösung
P_{3D}	Leistung einer 3D Struktur
P_{ESB}	Verlustleistung im ESB
W_{3D}	Im 3D Modell gespeicherte elektrostatische Energie

W_{ESB}	Elektrische Energie im ESB
ω	Kreisfrequenz mit $\omega = 2\pi f$
\mathcal{P}	Projektionsoperator
Φ	Eigenmode
Φ	Magnetischer Fluss
ϕ	Potential im Ersatzschaltbild
\mathbf{b}	Lösung eines Gleichungssystems
\mathbf{c}	Lösungsvektor
\mathbf{r}	Ortsvektor
\mathbf{x}	Lösungsvektor
\mathbf{y}	Anregungsvektor
A	Fläche
d	Abstand
f	Frequenz
l	Länge
p_i	i-ter Geometrieparameter

Q	Ladung
r_1	Innenradius einer Kugel
r_2	Außenradius einer Kugelschale
r_w	Radius eines Drahtes
s	Komplexwertige Laplace Variable: $s = i\omega$
t	Zeit
V	Volumen
CAD	Computer-aided design
EMI	Electro-Magnetic Interference
EMV	Elektromagnetische Verträglichkeit
FE	Finite Elemente
GB	GigaByte
PEEC	Partial-Element-Equivalent-Circuit

Literatur

- [1] President's Information Technology Advisory Committee: Computational Science: Ensuring America's Competitiveness. <http://vis.cs.brown.edu/docs/pdf/Pitac-2005-CSE.pdf>. Version: 2005
- [2] Schwab, A. J.: Elektromagnetische Verträglichkeit. Vierte, neubearbeitete Auflage. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg and Imprint and Springer, 1996. – ISBN 3662069792
- [3] Traub, F.: Automated Construction of Equivalent Electrical Circuit Models for Electromagnetic Components and Systems. Darmstadt, Techn. Univ., Diss., 2014. http://tuprints.ulb.tu-darmstadt.de/3805/1/Dissertation_Traub.pdf
- [4] Traub, F. ; Hansen, J. ; Ackermann, W. ; Weiland, T.: Generation of physical equivalent circuits using 3D simulations. In: 2012 IEEE International Symposium on Electromagnetic Compatibility (EMC), IEEE, 2012, 486–491
- [5] Traub, F. ; Hansen, J. ; Ackermann, W. ; Weiland, T.: Eigenmodes of electrical components and their relation to equivalent electrical circuits. In: 2013 IEEE International Symposium on Electromagnetic Compatibility (EMC), IEEE, 2013, 287–293
- [6] Traub, F. ; Hansen, J. ; Ackermann, W. ; Weiland, T.: Automated construction of physical equivalent circuits for inductive components. In: International Symposium on Electromagnetic Compatibility (EMC Europe), 2013. Piscataway, NJ : IEEE, 2013. – ISBN 978-1-4673-4980-2, 67–72
- [7] Potratz, C.: Interner Bericht - Automatisierte Identifikation von EMV-Koppelpfaden. 2014
- [8] Hansen, J. ; Potratz, C.: Capacity extraction in physical equivalent networks. In: 2015 IEEE International Symposium on Electromagnetic Compatibility (EMC), IEEE, 2015, 491–496

-
- [9] Potratz, C. ; Schuhmacher, S. ; Keller, C. ; Aichele, H.: Interner Bericht - Zwischenbericht Concept Study ARE-340. Renningen, 2015
- [10] Wittig, T. ; Schuhmann, R. ; Weiland, T.: Model order reduction for large systems in computational electromagnetics. In: Linear Algebra and its Applications 415 (2006), Nr. 2-3, 499–530. <http://dx.doi.org/10.1016/j.laa.2004.06.023>. – DOI 10.1016/j.laa.2004.06.023
- [11] Bondarenko, N. ; Makharashvili, T. ; He, J. ; Berger, P. ; Drewniak, J. ; Ruehli, A. E. ; Beutner, D. G.: Development of Simple Physics-Based Circuit Macromodel From PEEC. In: IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility 58 (2016), Nr. 5, 1485–1493. <http://dx.doi.org/10.1109/TEM.2016.2575847>. – DOI 10.1109/TEM.2016.2575847
- [12] Schuhmacher, S. ; Klaedtke, A. ; Keller, C. ; Ackermann, W. ; Gersem, H. de: Optimizing the inductance cancellation behavior in an EMI filter design with the help of a sensitivity analysis. In: 2017 International Symposium on Electromagnetic Compatibility - EMC EUROPE, IEEE, 2017. – ISBN 978-1-5386-0689-6, S. 1–6
- [13] Potratz, C.: Interner Bericht zur Vorstudie: Automatisierte Visualisierung von Koppelpfaden. 2014
- [14] Schuhmacher, S. ; Klaedtke, A. ; Keller, C. ; Wolfgang Ackermann ; and Herbert De Gersem: Adjoint Technique for Sensitivity Analysis of Coupling Factors According to Geometric Variations; Proceedings to Compu-mag conference; accepted for publication. IEEE TRANSACTION ON MAGNETICS, 2018
- [15] Schuhmacher, S. ; Potratz, C. ; Klaedtke, A. ; and De Gersem, H.: Sensitivity of Lumped Parameters to Geometry Changes in Finite Element Models; SCEE Conf; accepted for publication. Springer, 2018 (MATHEMATICS IN INDUSTRY)
- [16] Raviart, P.-A. ; Sonnendrücker, E.: A hierarchy of approximate models for the Maxwell equations. In: Numerische Mathematik 73 (1996), Nr. 3, S. 329–372. <http://dx.doi.org/10.1007/s002110050196>. – DOI 10.1007/s002110050196. – ISSN 0029-599X

-
- [17] Jackson, J. D.: Classical electrodynamics. 3rd ed. New York : Wiley, 1998. – ISBN 9780471309321
- [18] Schwab, A. J.: Begriffswelt der Feldtheorie. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2013. <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-34566-1>. <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-34566-1>. – ISBN 978-3-642-34565-4
- [19] Nolting, W.: Grundkurs Theoretische Physik 3. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2013. <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-37905-5>. <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-37905-5>. – ISBN 978-3-642-37904-8
- [20] Larsson, J.: Electromagnetics from a quasistatic perspective. In: American Journal of Physics 75 (2007), Nr. 3, S. 230. <http://dx.doi.org/10.1119/1.2397095>. – DOI 10.1119/1.2397095. – ISSN 00029505
- [21] Xie, H. ; Zhu, J. ; Ma, Z.: Darwin model in plasma physics revisited. In: Physica Scripta 89 (2014), Nr. 10, S. 105602. <http://dx.doi.org/10.1088/0031-8949/89/10/105602>. – DOI 10.1088/0031-8949/89/10/105602. – ISSN 0031-8949
- [22] Demtröder, W.: Springer-Lehrbuch. Bd. 2, Ed. 4: Elektrizität und Optik. 4., überarb. u. erw. Aufl. Berlin : Springer, 2006. – ISBN 978-3-540-33795-9
- [23] Sayas, F.-J.: A gentle introduction to the Finite Element Method. 2008
- [24] Ho, C.-W. ; Ruehli, A. ; Brennan, P.: The modified nodal approach to network analysis. In: IEEE Transactions on Circuits and Systems 22 (1975), Nr. 6, S. 504–509. <http://dx.doi.org/10.1109/TCS.1975.1084079>. – DOI 10.1109/TCS.1975.1084079. – ISSN 0098-4094
- [25] Ruehli, A. E. ; Antonini, G. ; Jiang, L.: The Partial Element Equivalent Circuit Method for Electro-Magnetic and Circuit Problems. Hoboken, New Jersey : Wiley and Sons, 2015

-
- [26] Paul, S. ; Paul, R.: Grundlagen der Elektrotechnik und Elektronik 1. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2010. <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-69078-8>. <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-69078-8>. – ISBN 978-3-540-69076-4
- [27] Paul, C. R.: Inductance: Loop and partial / Clayton R. Paul. Oxford : Wiley, 2010 <http://www.loc.gov/catdir/enhancements/fy0916/2009031434-d.html>. – ISBN 978-0-470-46188-4
- [28] Peltola, M.: Matriisi-algebra 03019P. https://s-mat-pcs.oulu.fi/~mpa/matreng/ematr5_5.htm
- [29] Peter, J. E. ; Dwight, R. P.: Numerical sensitivity analysis for aerodynamic optimization: A survey of approaches. In: Computers & Fluids 39 (2010), Nr. 3, S. 373–391. <http://dx.doi.org/10.1016/j.compfluid.2009.09.013>. – DOI 10.1016/j.compfluid.2009.09.013. – ISSN 00457930
- [30] Belegundu, A. D.: Lagrangian Approach to Design Sensitivity Analysis. In: Journal of Engineering Mechanics 111 (1985), Nr. 5, S. 680–695. [http://dx.doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1985\)111:5\(680\)](http://dx.doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1985)111:5(680)). – DOI 10.1061/(ASCE)0733-9399(1985)111:5(680). – ISSN 0733-9399
- [31] Weber, H.-J. ; Arfken, G. B.: Essential mathematical methods for physicists. San Diego, CA : Academic Press, 2004. – ISBN 0120598779
- [32] Steffen, H. ; Bausch, H.: Elektrotechnik: Grundlagen. 6., überarb. und aktualisierte Aufl. Wiesbaden : Teubner, 2007 (Bauwesen). – ISBN 978-3-8351-0014-5
- [33] Böge, W. ; Plassmann, W.: Formeln und Tabellen Elektrotechnik: Arbeits-hilfen für das technische Studium. 1. Aufl. Wiesbaden : Friedr. Vieweg & Sohn Verlag, 2007 (Viewegs Fachbücher der Technik). – ISBN 978-3-528-03973-8
- [34] Engelhardt, M.: Using Transformers in LTspice/SwitcherCAD III. http://cds.linear.com/docs/en/lt-journal/LTMag-V16N3-23-LTspice_Transformers-MikeEngelhardt.pdf. Version: 2006 (Linear Technology Magazine)

-
- [35] Neugebauer, T. C. ; Phinney, J. W. ; Perreault, D. J.: Filters and Components With Inductance Cancellation. In: IEEE Transactions on Industry Applications 40 (2004), Nr. 2, S. 483–491. <http://dx.doi.org/10.1109/TIA.2004.824487>. – DOI 10.1109/TIA.2004.824487. – ISSN 0093–9994
- [36] Wang, S. ; Lee, F. C. ; Odendaal, W. G. ; vanWyk, J. D.: Improvement of EMI Filter Performance With Parasitic Coupling Cancellation. In: IEEE Transactions on Power Electronics 20 (2005), Nr. 5, S. 1221–1228. <http://dx.doi.org/10.1109/TPEL.2005.854069>. – DOI 10.1109/TPEL.2005.854069. – ISSN 0885–8993
- [37] Weber, S.-P. ; Hoene, E. ; Guttowski, S. ; John, W. ; Reichl, H.: On coupling with EMI capacitors. In: 2004 International Symposium on Electromagnetic Compatibility, 9–13 Aug. 2004, S. 336–341
- [38] Numerical methods and optimization. New York : Springer, 2014. – ISBN 978–3–319–07670–6
- [39] Eller, M. ; Reitzinger, S. ; Schöps, S. ; Zaglmayr, S.: A Symmetric Low-Frequency Stable Broadband Maxwell Formulation for Industrial Applications. In: SIAM Journal on Scientific Computing 39 (2017), Nr. 4, S. B703–B731. <http://dx.doi.org/10.1137/16M1077817>. – DOI 10.1137/16M1077817. – ISSN 1064–8275



Sebastian Alfred Schuhmacher
geboren am 16.07.1985 in Ulm/Donau

Ausbildung

- | | |
|---------|--|
| 03/2014 | Master of Science
Abschlussprädikat: mit Auszeichnung abgeschlossen
Spezialisierung: Computational Physics
Universität Wien |
| 08/2012 | Bachelor of Science
Abschluss Bachelorstudium Physik
Universität Wien |
| 06/2005 | Abitur
Technisches Gymnasium Robert Bosch Ulm |

Auszeichnungen

- | | |
|---------|--|
| 06/2017 | Rita Trowbridge Award: Best paper presented by a young researcher of the Compumag conference, Daejeon, South Korea |
|---------|--|

B Schriftverzeichnis

B.1 Beiträge in Zeitschriften

Schuhmacher Sebastian, Klaedtke Andreas, Keller Christoph, Ackermann Wolfgang and De Gersem Herbert: Optimizing the Inductance Cancellation Behavior in an EMI Filter Design with the Help of a Sensitivity Analysis. In: 2017 International Symposium on Electromagnetic Compatibility - EMC EUROPE, IEEE, 2017. – ISBN 978-1-5386-0689-6, S. 1-6

Schuhmacher Sebastian, Klaedtke Andreas, Keller Christoph, Wolfgang Ackermann and De Gersem Herbert: Adjoint Technique for Sensitivity Analysis of Coupling Factors According to Geometric Variations, accepted for publication. IEEE TRANSACTION ON MAGNETICS, 2018

Schuhmacher Sebastian, Potratz Carsten, Klaedtke Andreas and De Gersem Herbert: Sensitivity of Lumped Parameters to Geometry Changes in Finite Element Models, accepted for publication, MATHEMATICS IN INDUSTRY, Springer, 2018

B.2 Beiträge auf internationalen Konferenzen

Schuhmacher Sebastian, Potratz Carsten, Klaedtke Andreas and De Gersem Herbert, Sensitivity of Lumped Parameters to Geometry Changes in Finite Element Models, 10th International Conference on Scientific Computing in Electrical Engineering (SCEE), St. Wolfgang, Österreich, 2016

Schuhmacher Sebastian, Klaedtke Andreas, Keller Christoph, Wolfgang Ackermann and De Gersem Herbert, Adjoint Technique for Sensitivity Analysis of Coupling Factors According to Geometric Variations, 21st International Conference on the Computation of Electromagnetic Fields (Compumag), Daejeon, South Korea, 2017

Schuhmacher Sebastian, Klaedtke Andreas, Keller Christoph, Ackermann Wolfgang and De Gersem Herbert, Optimizing the Inductance Cancellation Behavior in an EMI Filter Design with the Help of a Sensitivity Analysis, International Symposium on Electromagnetic Compatibility (EMC EUROPE), Angers, France, 2017